АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ I
ВЫПУСК
2

U. of ILL. LIBRARY
SEP 9 1971
CHICAGO CIRCLE

1956

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 2*
1956

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Бернштейн С. Н., ***Гнеденко Б. В.***, ***Золотарев В. М.*** (ответственный секретарь), ***Колмогоров А. Н.*** (главный редактор), ***Королюк В. С.*** (зам. гл. редактора), ***Линник Ю. В.***, ***Сарымсаков Т. А.***, ***Смирнов Н. В.***, ***Хинчин А. Я.***

СОДЕРЖАНИЕ

Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей 177
Prohorov Yu. V. Convergence of Random Processes and Limit Theorems in Probability Theory 238
Колмогоров А. Н. О сходимости А. В. Скорохода 239
Kolmogorov A. N. On the Skorohod Convergence 247
Петров А. А. Проверка статистических гипотез о типе распределения по малым выборкам 248
Petrov A. A. Verification of Statistical Hypotheses on the Type of a Distribution Based on Small Samples 270

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Джемс-Леви Г. Е. Номограмма для интегрального закона распределения Стьюдента 272
James-Levy G. E. A Nomogram for the Integral Law of Student's Distribution 274
Осскоп Г. А. Одна предельная теорема для потоков однородных событий . 274
Ossoskow G. A. Ein Grenztheorem für Folgen gleichartiger Ereignisse . . . 282
Ибрагимов И. А. О композиции одновершинных распределений 283
Ibragimov I. A. On the Composition of unimodal Distributions . . . 288

Адрес редакции: Москва В—234, МГУ, Мех.-матем. факультет, тел. В 9-18-01

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 2*
1956

СХОДИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Ю. В. ПРОХОРОВ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 177
Глава 1. Меры в метрических пространствах 180
§ 1.1. «Заряды» и линейные функционалы 180
§ 1.2. Счетно-аддитивные заряды и меры 182
§ 1.3. Слабая сходимость мер 184
§ 1.4. Пространство $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ 187
§ 1.5. Условия компактности подмножеств $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ 191
§ 1.6. Меры в пространстве Гильберта 192
Глава 2. Случайные процессы и функции 199
§ 2.1. Случайные процессы и распределения в функциональных пространствах 199
§ 2.2. Условия компактности семейств распределений в $C[0,1]$ 202
§ 2.3. Условия компактности семейств распределений в $D[0,1]$ 203
§ 2.4. Пример: критерий Колмогорова 208
Глава 3. Переход от серии независимых случайных величин к процессам с независимыми приращениями 211
§ 3.1. Сходимость к винеровскому распределению 211
§ 3.2. Сходимость к неограниченно делимым процессам 214
Глава 4. Одна оценка скорости сходимости 220
Дополнение 1. Функции с разрывами первого рода 227
Дополнение 2. Замечание о плотностях мер 229
Цитированная литература 235

ВВЕДЕНИЕ

Когда в теории вероятностей говорят о сходимости распределений случайных величин (или случайных векторов) ξ_n, $n = 1,2, \ldots$, к распределению случайной величины (или случайного вектора) ξ, то под этим понимают обычно так называемую слабую сходимость (сходимость функций распределения величин ξ_n к функции распределения ξ в каждой точке непрерывности этой последней). В противоположность этому, сходимость распределений случайных процессов $\xi_n(t)$ к распределению процесса $\xi(t)$ не имеет такого общепринятого определения.

Ряд теорем о сходимости случайных процессов можно найти, например, в работах [3.2], [3.3], [2.17], [2.22], [1.5], [1.6], [3.12], [3.7] и др *. Опре-

* См. обзорную статью [2.8]. (Примечание: первая цифра при нумерации теорем, лемм, формул и литературных ссылок указывает номер соответствующей главы; номера в квадратных скобках относятся к библиографии, помещенной в конце работы.)

деления сходимости случайных процессов, из которых исходят эти работы, различны. Но анализ показывает, что во всех случаях эта сходимость может интерпретироваться как «слабая сходимость» распределений в надлежаще подобранных функциональных пространствах.

В наиболее простых и в то же время наиболее интересных случаях эти пространства оказываются полными сепарабельными метрическими пространствами.

Этим объясняется, почему изучением слабой сходимости мер в полных сепарабельных метрических пространствах заполнена целая глава (гл. 1). Пусть $\mathfrak{R}$ — такое пространство. Как известно, последовательность $\{\mu_n\}$ мер в $\mathfrak{R}$ называется слабо сходящейся к мере μ, если для любого непрерывного и ограниченного функционала $f(x)$

$$\int\limits_{\mathfrak{R}} f(x)\, d\mu_n \to \int\limits_{\mathfrak{R}} f(x)\, d\mu.$$

Степень, в которой использование слабой сходимости соответствует целям настоящей работы, в какой-то мере поясняется теоремами 1.2, 1.7, 1.8, 1.10.

В § 1.4 показывается, как можно ввести расстояние $L(\mu_1, \mu_2)$ между двумя мерами μ_1 и μ_2 (аналогичное расстоянию Леви для мер на прямой) такое, что сходимость в смысле этого расстояния равносильна слабой сходимости. Совокупность конечных мер в $\mathfrak{R}$ вместе с расстоянием L образует полное сепарабельное метрическое пространство $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$. Необходимое и достаточное условие компактности множества $\mathfrak{N} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{R})$, т. е. существование при любом $\varepsilon > 0$ в $\mathfrak{N}$ ε-сети, в иных терминах выглядит следующим образом: для компактности множества $\mathfrak{N} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих двух условий:

1. $$\sup_{\mu \in \mathfrak{N}} \mu(\mathfrak{R}) < \infty.$$

2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт K_ε такой, что для каждой меры $\mu \in \mathfrak{N}$

$$\mu(\mathfrak{R} \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Этот результат представляет и самостоятельный интерес. Частные его случаи неоднократно использовались при выводе эргодических теорем (см. [1.8] — [1.10]). Для случая локально-компактных пространств сходный результат (в других терминах) получен А. Д. Александровым в работе [1.2], посвященной тщательному изучению слабой сходимости.

В главе 2 перечисленные результаты применяются к «случайным процессам». Термином «случайный процесс», взятым в кавычки, я обозначаю просто систему согласованных конечномерных распределений*. Известны достаточные условия того, чтобы системы конечномерных распределений порождались распределением в том или ином конкретном функциональном пространстве $\mathfrak{R}$ (см. [2.1], [2.2] — [2.7]). Обычно каждое из этих условий позволяет оценить вероятность попадания за пределы

* Различные подходы к определению понятий случайного процесса и случайной функции разобраны, например, в работе [2.8], куда читатель и отсылается за подробностями.

того или иного компакта и, тем самым, помогает отысканию условий компактности семейств распределений в $\mathfrak{R}$. Такого рода условия, выраженные в терминах «конечномерных распределений» (или переходных вероятностей, в случае марковских «процессов»), и вытекающие из них условия сходимости распределений, соответствующих каким-либо «случайным процессам» $\xi_n(t)$, к предельному, составляют содержание § 2.2 и 2.3. Методы, применяемые в доказательстве теорем 2.2 и 2.3, существенно используются в главе третьей. В качестве иллюстрации к содержанию § 2.3 в § 2.4 выводится полученное в [2.11] обобщение результатов Колмогорова о сходимости эмпирического распределения к теоретическому*.

Несколько изолированно стоит § 1.6. Здесь предполагается, что $\mathfrak{R}$ есть сепарабельное пространство Гильберта, и выводятся условия компактности семейств распределений в $\mathfrak{R}$, выраженные через соответствующие «характеристические функционалы» (х. ф.).

$$\chi(f, P) = \int_{\mathfrak{R}} e^{if(x)} dP,$$

где f — линейный функционал (см. [1.5] — [1.7]).

Если для последовательности распределений выполнены эти условия и соответствующие х. ф. сходятся к некоторой непрерывной функции $\chi(f)$, то последовательность слабо сходится к распределению P с $\chi(f, P) = \chi(f)$.

Полученные в § 1.6 результаты содержат в себе теорему Мурье [1.5] о сходимости распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов со значениями из $\mathfrak{R}$ к нормальному.

Глава третья состоит из двух параграфов. В § 3.1 доказана объявленная мною ранее [3.7] теорема о необходимых и достаточных условиях сходимости распределений «случайных ломаных», построенных по суммам независимых случайных величин, к винеровскому распределению. Достаточные условия такой сходимости указывались ранее в работах Колмогорова [3.1], [3.2], Эрдеша и Каца [3.4] и Донскера [3.3]. В § 2.2 приведены необходимые и достаточные условия сходимости распределения «случайных ломаных», построенных по суммам независимых случайных величин, к распределениям, соответствующим безгранично-делимым процессам. Этот результат обобщает теорему, полученную ранее для случая одинаково распределенных слагаемых А. В. Скороходом [3.12]**.

Доказательства результатов главы третьей опираются на теоремы главы первой и дополнения 1 ***.

---

* Колмогоров [2.12]. См. также [2.17] — [2.21].

** Объявленные в устном сообщении А. В. Скорохода условия, которые он считал необходимыми и достаточными для указанной сходимости в общем случае, в действительности не являются достаточными.

*** В моей диссертации [3.14] имеются довольно широкие условия, при выполнении которых распределение «случайных ломаных», соответствующих дискретному марковскому процессу, образуют компактное семейство. Мне не удалось пока установить столь же широкие условия сходимости указанных распределений к предельному (однако указан предполагаемый вид этих условий).

Следует отметить, что слабую сходимость вышеупомянутых распределений к предельному можно также выводить из результатов, полученных методом «верхних и нижних функций», опираясь при этом на теорему 1.9.

Глава четвертая посвящена доказательству теоремы 4.1. Эта теорема усиливает (как в отношении меньшей жесткости ограничений на слагаемые и на вид границ, так и в отношении порядка остаточного члена) результаты, полученные в этом направлении Чжуном* (см. [4.4]).

В дополнении 1 к первой главе изучаются определенные на отрезке $[0,1]$ функции φ, имеющие в каждой точке предельные значения справа и слева**. Вводится расстояние $d(\varphi_1, \varphi_2)$, по отношению к которому совокупность этих функций становится полным сепарабельным метрическим пространством. Это пространство я обозначаю $D[0,1]$. Даются необходимые и достаточные условия компактности подмножеств $D[0,1]$. Перечисленные результаты позволяют применить к распределениям в $D[0,1]$ общие теоремы главы 1.

В конце работы помещен список литературы. В него включены не только статьи, на которые я непосредственно ссылаюсь, но также и статьи, в том или ином отношении близкие к теме настоящей работы.

В заключение я горячо благодарю А. Н. Колмогорова за его внимание к настоящей работе и за советы, которые способствовали ее улучшению.

ГЛАВА 1. МЕРЫ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1.1. «Заряды» и линейные функционалы

В дальнейшем $\mathfrak{R}$ означает полное сепарабельное метрическое пространство, $C(\mathfrak{R})$ — совокупность непрерывных и ограниченных на $\mathfrak{R}$ функционалов $f(x)$***. В соответствии с терминологией, принятой в [1.2], назовем неотрицательным зарядом (короче — зарядом) действительную функцию множества $m(A)$, для которой

$(m.1)$ область определения есть алгебра множеств $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$, порожденная замкнутыми множествами из $\mathfrak{R}$,

---

* Следует отметить, однако, что в биномиальном случае Чжуном получен остаточный член $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

** Случайные процессы, реализации которых могут иметь разрывы только первого рода, представляют большой интерес. Первые общие предельные теоремы для процессов такого рода были получены А. В. Скороходом [3.12]. В этой же работе Скорохода было введено понятие сходимости для функций, могущих иметь разрывы только первого рода, в случае непрерывных функций совпадающее с понятием равномерной сходимости. Вопрос о возможности превращения, надлежащим выбором метрики, совокупности функций с разрывами первого рода в полное сепарабельное метрическое пространство был в принципе решен А. Н. Колмогоровым (см. его статью в этом номере журнала). Мне удалось построить явным образом соответствующую метрику d и изучить более детально свойства так полученного пространства $D[0,1]$. Сходимость в смысле метрики d равносильна вышеупомянутой сходимости А. В. Скорохода.

*** Буквой $\mathfrak{R}$ обозначается также и множество точек пространства. Опасность смешения здесь невелика. Постоянно используются также обозначения: $\bar{A} = \mathfrak{R} \setminus A$, $[A]$ — замыкание A, $S(x, \delta)$ — открытая δ-окрестность точки x, $S(A, \delta) = \{x: \inf_{x_0 \in A} \rho(x, x_0) < \delta\}$.

($m.2$) для любых попарно непересекающихся $A_1, A_2, \ldots, A_n$, входящих в $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$, $m(\cup A_i) = \sum m(A_i)$ (конечная аддитивность),

($m.3$) заряд любого множества $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ есть точная верхняя грань зарядов замкнутых множеств, содержащихся в A (или, что то же самое, точная нижняя грань зарядов открытых множеств, содержащих A).

Для каждого функционала $f \in C(\mathfrak{R})$ интеграл от f по заряду m

$$\int_{\mathfrak{R}} f(x)\, dm$$

определяется точно так же, как интеграл Лебега, т. е. как предел сумм вида

$$\sum_k \lambda_k^n m\{x: \lambda_k^n \leqslant f(x) < \lambda_{k+1}^n\},$$

где при данном n числа λ_k^n возрастают с возрастанием k и $\lim\limits_n \sup\limits_k |\lambda_{k+1}^n - \lambda_k^n| = 0$. Так определенный интеграл существует для любого $f \in C(\mathfrak{R})$.

Между линейными функционалами на $C(\mathfrak{R})$ (т. е. функционалами $l(f)$, $f \in C(\mathfrak{R})$, для которых $l(\alpha f + \beta g) = \alpha l(f) + \beta l(g)$ и $|l(f)| \leqslant N \sup\limits_{x \in \mathfrak{R}} |f(x)|$) и зарядами в $\mathfrak{R}$ имеется простая связь. Эту связь в форме, достаточной для целей настоящей работы, дает

Теорема 1.1. *Функционал $l(f)$ тогда и только тогда является линейным и положительным (т. е. $l(f) \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$), когда он допускает представление вида*

$$l(f) = \int_{\mathfrak{R}} f(x)\, dm, \tag{1.1}$$

где m — заряд в $\mathfrak{R}$. Представление такого рода единственно.

Доказательство (в более общих предположениях) можно найти в работах [1.2] или [1.3].

Понятие «сходимости» зарядов вводится следующим определением: последовательность зарядов $\{m_n\}$ называется слабо сходящейся к заряду m ($m_n \Rightarrow m$), если для любого $f \in C(\mathfrak{R})$

$$\int_{\mathfrak{R}} f(x)\, dm_n \to \int_{\mathfrak{R}} f(x)\, dm.$$

Условия слабой сходимости зарядов непосредственно через значения самих зарядов могут быть выражены, например, следующим образом (см. [1.2]):

Теорема 1.2. *Для сходимости $m_n \Rightarrow m$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

а) $\lim\limits_n m_n(\mathfrak{R}) = m(\mathfrak{R})$, $\overline{\lim\limits_n} m_n(G) \geqslant m(G)$ *для любого открытого множества $G \subseteq \mathfrak{R}$,*

или условия

б) $\lim\limits_n m_n(\mathfrak{R}) = m(\mathfrak{R})$, $\overline{\lim\limits_n} m_n(F) \leqslant m(F)$ *для любого замкнутого множества $F \leqslant \mathfrak{R}$.*

Почти очевидным следствием теоремы 1.1 является

Теорема 1.3. *Если для каждого функционала $f \in C(\mathfrak{R})$ существует предел*

$$l(f) = \lim_n \int_{\mathfrak{R}} f(x)\, dm_n,$$

то $l(f)$ допускает представление (1.1) *и $m_n \Rightarrow m$.*

§ 1.2. Счетно-аддитивные заряды и меры

Заряд называется счетно-аддитивным, если

($m.2'$) для любой конечной или счетной системы попарно непересекающихся множеств $A_i \in \mathfrak{A}(\mathfrak{R})$, сумма которых входит в $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$, $m(\cup A_i) = \sum m(A_i)$.

Условие ($m.2'$) равносильно, как известно, условию

($m.2''$) для любой убывающей последовательности

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$$

множеств из $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ с пустым пересечением имеет место равенство $\lim_n m(A_n) = 0$.

Теорема 1.4. *Для того, чтобы заряд m был счетно-аддитивным, необходимо и достаточно, чтобы заряд любого множества $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ был точной верхней гранью зарядов компактов, содержащихся в A.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим сначала случай $A = \mathfrak{R}$. Пусть $\{x_n\}$ — счетное, всюду плотное в $\mathfrak{R}$ множество, S_n^k — замкнутая $1/k$-окрестность множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Множества S_n^k при фиксированном k образуют возрастающую последовательность и в сумме дают все $\mathfrak{R}$. Из ($m.2'$) вытекает, что

$$\lim_n m(S_n^k) = m(\mathfrak{R}).$$

Определим числа n_k из неравенств

$$m(S_{n_k}^k) \geqslant m(\mathfrak{R}) - \varepsilon \cdot 2^{-k}.$$

Тогда m — заряд компакта

$$K_\varepsilon = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{n_k}^k$$

будет не меньше $m(\mathfrak{R}) - \varepsilon$. В случае произвольного $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ выберем замкнутое множество $F \subseteq A$ таким образом, чтобы его заряд отличался от заряда A не более чем на $\varepsilon/2$. Компакт $F \cap K_{\varepsilon/2}$ содержится в A и его заряд отличается от заряда A не более чем на ε.

Достаточность. Докажем, что в условиях теоремы имеет место ($m.2''$). Допустим противное. Тогда найдется убывающая последовательность $\{A_n\}$ множеств из $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$, для которой

$$\text{а) } \bigcap_n A_n \text{ пусто и б) } \lim_n m(A_n) = \lambda > 0. \tag{1.2}$$

Для каждого n определим контакт $K_n \subseteq A_n$ так, чтобы его заряд отличался от заряда A не более, чем на $\lambda \cdot 2^{-(n+1)}$. Компакты $K_n^* = K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_n$ образуют убывающую последовательность, для которой $m(K_n^*) \geqslant \lambda/2$ при всех n. В силу последнего неравенства множества K_n^* не пусты. Выбирая в каждом из них по точке, мы получим последовательность, все элементы которой входят в K_1^*. Эта последовательность содержит в себе сходящуюся подпоследовательность, предел которой, как легко видеть, входит в $\bigcap_n K_n^*$. Следовательно, $\bigcap_n A_n$ непусто, что противоречит (1.2а). Теорема 1.4 доказана.

Перейдем теперь к изучению конечных мер в $\mathfrak{R}$.

Определение. *Мерой в $\mathfrak{R}$ называется всякая действительная неотрицательная функция множества $\mu(A)$, для которой*

(μ.1) *область определения $\mathfrak{M}_\mu$ есть σ-алгебра подмножеств $\mathfrak{R}$ с единицей $\mathfrak{R}$,*

(μ.2) *для любых данных в конечном или счетном числе попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathfrak{M}_\mu$*

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n),$$

(μ.3) *из $\mu(A) = 0$ и $B \subseteq A$ вытекает $B \in \mathfrak{M}_\mu$,*

(μ.4) *все замкнутые множества пространства $\mathfrak{R}$ входят в $\mathfrak{M}_\mu$,*

(μ.5) *мера $\mu(A)$ любого $A \in \mathfrak{M}_\mu$ есть точная верхняя грань мер $\mu(F)$ замкнутых множеств F, содержащихся в A.*

Меры, для которых $\mu(\mathfrak{R}) = 1$, называются распределением вероятностей в $\mathfrak{R}$ или, короче, распределениями в $\mathfrak{R}$. Относительно целесообразности введения требования (μ.5) см. [1.1], гл. 1.

Один из числа хорошо известных результатов, относящихся к продолжению мер, содержит

Теорема 1.5. *Каждому счетно-аддитивному заряду m соответствует одна и только одна мера μ_m, для которой*

$$\mu_m(A) = m(A) \text{ для } A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{R}).$$

Примечание. Если μ — мера, то, полагая $m_\mu(A) = \mu(A)$ для $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{R})$, мы получаем счетно-аддитивный заряд m_μ, для которого $\mu_{m_\mu} \equiv \mu$. Из этого примечания и теоремы 1.4 вытекает

Следствие. *Если μ — мера, то для любых $A \in \mathfrak{M}_\mu$ и $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K \subseteq A$ такой, что $\mu(A \setminus K) \leqslant \varepsilon$* (см. [1.4], стр. 45 и 180).

Всякое однозначное отображение ξ пространства $\mathfrak{R}$ в какое-либо множество $\mathfrak{R}'$ порождает естественным образом в $\mathfrak{R}'$ счетно-аддитивную функцию μ^ξ. Область определения $\mathfrak{M}_{\mu^\xi}$ состоит из тех $A' \subseteq \mathfrak{R}'$, чьи полные прообразы $\xi^{-1}(A')$ входят в $\mathfrak{M}_\mu$. Для $A' \in \mathfrak{M}_{\mu^\xi}$ полагают

$$\mu^\xi(A') = \mu(\xi^{-1}(A')).$$

В том случае, когда $\mathfrak{R}'$ есть топологическое пространство, наиболее интересны μ-измеримые отображения, т. е. такие отображения, при

которых полные прообразы всех открытых (а следовательно, и прообразы всех борелевских) множеств из $\mathfrak{R}'$ входят в $\mathfrak{M}_\mu$. Любое μ-измеримое отображение пространства $\mathfrak{R}$ в метрическое полное сепарабельное пространство $\mathfrak{R}$ порождает в этом пространстве меру (в смысле данного выше определения; см. [1.1], стр. 23, где это утверждение приведено без доказательства; ниже дается доказательство для одного специального класса измеримых отображений).

Теорема 1.6. *Каждое непрерывное μ-почти всюду отображение ξ пространства $\mathfrak{R}$ в метрическое пространство $\mathfrak{R}'$ порождает в нем меру (в смысле данного выше определения) μ^ξ.*

Доказательство. Свойствами (μ.1—3) функция множества μ^ξ обладает при всяком отображении ξ. Остается проверить, что в условиях теоремы выполняются (μ.4) и (μ.5). Множество $C \subseteq \mathfrak{R}$ точек, в которых отображение ξ непрерывно, имеет меру $\mu(C) = \mu(\mathfrak{R})$, и его можно (см. (μ.5)) представить в виде

$$C = (\bigcup_m F_m) \cup C_1,$$

где F_m — замкнутые множества и $\mu(C_1) = 0$. Следовательно, $\mathfrak{R} = (\bigcup_m F_m) \cup C_2$, где $\mu(C_2) = 0$. В соответствии с этим полный прообраз $\xi^{-1}(F')$ замкнутого множества $F' \subseteq \mathfrak{R}'$ допускает представление

$$\xi^{-1}(F') = \bigcup_m (\xi^{-1}(F') \cap F_m) \cup (C_2 \cap \xi^{-1}(F')).$$

Слагаемое $C_2 \cap \xi^{-1}(F')$ μ-измеримо и имеет μ-меру нуль (см. (μ.3)), а все остальные слагаемые суть замкнутые множества. Таким образом, множество $\xi^{-1}(F')$ измеримо. Отсюда вытекает измеримость отображения ξ. Далее, для произвольного $A \in \mathfrak{M}_{\mu^\xi}$ можно подобрать компакт K_ε так, чтобы выполнялись соотношения

$$K_\varepsilon \subseteq C \cap \xi^{-1}(A'), \quad \mu(\xi^{-1}(A') \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Множество $\xi(K_\varepsilon) \subseteq A'$ компактно, как непрерывный образ компакта и

$$\mu^\xi(A' \setminus \xi(K_\varepsilon)) = \mu(\xi^{-1}(A') \setminus \xi^{-1}(\xi(K_\varepsilon)) \leqslant \mu(\xi^{-1}(A') \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Итак, в каждом $A' \in \mathfrak{M}_{\mu^\xi}$ можно найти компакт сколь угодно близкой меры. Отсюда, очевидно, вытекает (μ.5). Теорема доказана.

§ 1.3. Слабая сходимость мер

Как уже говорилось в примечании к теореме 1.5, между мерами и счетно-аддитивными зарядами существует взаимно-однозначное соответствие. При этом для любого $f \in C(\mathfrak{R})$

$$\int_{\mathfrak{R}} f(x)\, d\mu = \int_{\mathfrak{R}} f(x)\, dm_\mu. \tag{1.3}$$

Последовательность мер μ_n мы назовем слабо сходящейся к мере μ ($\mu_n \Rightarrow \mu$), если $m_{\mu_n} \Rightarrow m_\mu$. В силу равенства (1.3) можно сформулировать следующее, эквивалентное приведенному,

Определение. *Последовательность мер* μ_n *слабо сходится к мере* μ, *если для любого* $f \in C(\mathfrak{R})$

$$\int_{\mathfrak{R}} f(x)\, d\mu_n \to \int_{\mathfrak{R}} f(x)\, d\mu.$$

Ниже приводятся три теоремы о необходимых и достаточных условиях слабой сходимости мер, из которых первая представляет собой лишь видоизменение теоремы 1.2, а вторая легко выводится из первой (см. [1.2]). Встречающееся в теореме 1.7 понятие *множеств непрерывности* широко используется при изучении слабой сходимости.

Определение. *Множество* A *называется* μ*-множеством непрерывности, если* μ*-мера его границы равна нулю.*

В дальнейшем, если только прямо не оговорено противное, мы будем иметь в виду борелевские множества непрерывности.

Лемма 1.1. *Множества непрерывности какой-либо меры* μ *в* $\mathfrak{R}$ *образуют подалгебру* $\mathfrak{S}_\mu$ *алгебры всех борелевских множеств* $\mathfrak{R}$.

Действительно, так как границы множеств A и $\mathfrak{R} \setminus A$ совпадают, то вместе с A в $\mathfrak{S}_\mu$ входит и $\mathfrak{R} \setminus A$. Далее, включение гран. $(A \cup B) \subseteq$ гран. $A \cap$ гран. B показывает, что вместе с A и B в $\mathfrak{S}_\mu$ входит и $A \cup B$.

Теорема 1.2. *Для сходимости* $\mu_n \Rightarrow \mu$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

а) $\lim\limits_n \mu_n(\mathfrak{R}) = \mu(\mathfrak{R})$, $\overline{\lim\limits_n} \mu_n(G) \leqslant \mu(G)$ *для любого открытого множества* $G \subseteq \mathfrak{R}$;

или условия

б) $\lim\limits_n \mu_n(\mathfrak{R}) = \mu(\mathfrak{R})$, $\overline{\lim\limits_n} \mu_n(F) \leqslant \mu(F)$ *для любого замкнутого множества* $F \subseteq \mathfrak{R}$.

Теорема 1.7. *Для сходимости* $\mu_n \Rightarrow \mu$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого множества непрерывности меры* μ

$$\mu_n(A) \to \mu(A).$$

Теорема 1.8. *Для сходимости* $\mu_n \Rightarrow \mu$ *необходимо и достаточно, чтобы для любой действительной непрерывной* μ*-почти всюду функции* $\xi(x)$ $\mu_n^\xi \Rightarrow \mu^\xi$.

Примечание. В последней теореме, в части, касающейся достаточных условий, можно рассматривать только $\xi \in C(\mathfrak{R})$. В части, касающейся необходимых условий, можно рассматривать непрерывные почти всюду по мере μ отображения пространства $\mathfrak{R}$ в конечномерные эвклидовы пространства (см. также теорему 1.10).

Доказательство теоремы 1.8. Достаточность. Пусть $\xi \in C(\mathfrak{R})$ и $\sup\limits_{x \in \mathfrak{R}} |\xi(x)| < K$. Положим $g(y) = y$ при $|y| \leqslant K$, $g(y) = K$ $(-K)$ при $y > K$ (соотв. $y < -K$). Из справедливых для любой меры μ в $\mathfrak{R}$ равенств

$$\int_{\mathfrak{R}} \xi(x)\, d\mu = \int_{|y| \leqslant K} y\, d\mu^\xi = \int_{\mathfrak{R}^1} g(y)\, d\mu^\xi$$

и условий теоремы вытекает сходимость $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Необходимость. Пусть C — множество точек, в которых функция $\xi(x)$ непрерывна. По предположению $\mu(\mathfrak{R} \setminus C) = 0$. Для μ-меры границы множества $E_\alpha = \{x : \xi(x) < \alpha\}$ из очевидного включения

$$\text{гран. } E_\alpha \subseteq \{x : \xi(x) = \alpha\} \cup (\mathfrak{R} \setminus C)$$

получаем оценку: $\mu(\text{гран. } E_\alpha) \leqslant \mu\{x : \xi(x) = \alpha\}$. Величина, стоящая в правой части последнего неравенства, может быть отлична от нуля для не более чем счетного множества значений α. Следовательно, для всюду плотного на числовой прямой множества значений α $\mu(\text{гран. } E_\alpha) = 0$. Для этих α «функции распределения»

$$F_n(\alpha) = \mu_n(E_\alpha) = \mu_n^\xi\{y : y < \alpha\}$$

сходятся к «функции распределения»

$$F(\alpha) = \mu(E_\alpha) = \mu^\xi\{y : y < \alpha\}.$$

Кроме того, очевидно, $F_n(\infty) \to F(\infty)$. Поэтому (см. [1.1], стр. 44) $\mu_n^\xi \Rightarrow \mu^\xi$, ч. тр. д.

Иногда удается сравнительно просто установить, что имеет место сходимость

$$\mu_n(A) \to \mu(A), \quad A \in \mathfrak{S} \tag{1.4}$$

для какой-либо специальной системы $\mathfrak{S}$ подмножеств пространства $\mathfrak{R}$. Из сходимости (1.4) в некоторых случаях можно сделать заключение о слабой сходимости мер μ_n к μ. При этом оказывается полезной

Теорема 1.9. *Если система $\mathfrak{S}$ подмножеств $\mathfrak{R}$ такова, что* (а) $\mathfrak{R} \in \mathfrak{S}$, (б) *всякое открытое множество является суммой конечного или счетного числа множеств из* $\mathfrak{S}$, (в) $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{S}$ *влечет* $A \cap B \in \mathfrak{S}$, *то из сходимости* (1.4) *вытекает слабая сходимость μ_n к μ.*

Доказательство. В силу (в) пересечение конечного числа множеств из $\mathfrak{S}$ входит в $\mathfrak{S}$. Поэтому из формулы

$$\mu_n(\cup A_i) = \sum_i \mu_n(A_i) - \sum_{i,j} \mu_n(A_i \cap A_j) + \dots$$

и аналогичной формулы для μ следует, что при $n \to \infty$ $\mu_n(\cup A_i) \to \mu(\cup A_i)$, $A_i \in \mathfrak{S}$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Пусть B — какое-либо открытое множество. По условию (б) его можно представить как сумму множеств $A_1, A_2, \dots$, входящих в $\mathfrak{S}$. Для каждого p

$$\varliminf_n \mu_n(B) \geqslant \varliminf_n \mu_n\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right). \tag{1.5}$$

Левая часть (1.5) не зависит от p, а правая имеет пределом (при $p \to \infty$) величину $\mu(B)$. По теореме 1.2′ $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Мы приведем теперь еще один общий результат, примыкающий к теореме 1.8.

Теорема 1.10. *Если $\mu_n \Rightarrow \mu$ и $\{\xi_n(x)\}$ — последовательность непрерывных отображений пространства $\mathfrak{R}$ в метрическое пространство $\mathfrak{R}'$, равномерно сходящаяся на каждом компакте $K \subseteq \mathfrak{R}$ к отображению $\xi(x)$, то $\mu_n^{\xi_n} \Rightarrow \mu^\xi$.*

Доказательство. Пусть $g(y) \in C(\mathfrak{R}')$ и $\varepsilon > 0$ — заданное число. Выберем в соответствии с леммой 1.3 (см. § 1.4) компакт K, для которого

$$\mu(\mathfrak{R} \setminus K) < \varepsilon/4M \text{ и } \mu_n(\mathfrak{R} \setminus K) < \varepsilon/4M, \quad n \geqslant 1,$$

где $M = \sup_{y \in \mathfrak{R}'} |g(y)|$. Образ K при отображении $\xi(x)$ есть компакт $K' \subseteq \mathfrak{R}'$. Найдем $\delta > 0$ столь малое, что

$$|g(y') - g(y)| < \varepsilon/4$$

при $\rho'(y', y) < \delta$, $y \in K'$ и возьмем затем n_0 столь большим, что при $n \geqslant n_0$ $\sup_{x \in K} \rho'(\xi_n(x), \xi(x)) < \delta$ и

$$\left| \int_{\mathfrak{R}} g(\xi(x))\, d\mu_n - \int_{\mathfrak{R}} g(\xi(x))\, d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда, как нетрудно подсчитать, при $n \geqslant n_0$

$$\left| \int_{\mathfrak{R}} g(\xi_n(x))\, d\mu_n - \int_{\mathfrak{R}} g(\xi(x))\, d\mu \right| < \varepsilon,$$

ч. тр. д.

§ 1.4. Пространство $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$

Мы определим теперь *расстояние* $L(\mu_1, \mu_2)$ между двумя мерами μ_1 и μ_2 так, чтобы сходимость в смысле этого расстояния была эквивалентна слабой сходимости мер.

Пусть F — какое-либо замкнутое множество. Обозначим через F^ε открытое множество $S(F, \varepsilon)$ и определим число $\varepsilon_{1,2}(\varepsilon_{2,1})$ как нижнюю грань тех ε, для которых при всех замкнутых $F \subseteq \mathfrak{R}$

$$\mu_2(F) < \mu_1(F^\varepsilon) + \varepsilon \text{ (соотв. } \mu_1(F) < \mu_2(F^\varepsilon) + \varepsilon). \tag{1.6}$$

Положим $L(\mu_1, \mu_2) = \max(\varepsilon_{1,2}, \varepsilon_{2,1})$. Очевидно, что

$$L(\mu_1, \mu_2) \geqslant 0, \quad L(\mu, \mu) = 0, \quad L(\mu_1, \mu_2) = L(\mu_2, \mu_1).$$

Аксиома треугольника легко проверяется (следует лишь использовать включение $[F^{\varepsilon_1}]^{\varepsilon_2} \subseteq F^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$. Наконец, если $L(\mu_1, \mu_2)$ равно нулю, то (1.6) выполняется при каждом $\varepsilon > 0$. В пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем $\mu_2(F) \leqslant \leqslant \mu_1(F)$, $\mu_1(F) \leqslant \mu_2(F)$. Значения мер μ_1 и μ_2 совпадают для любого замкнутого множества. По свойству (μ.5) $\mu_1 \equiv \mu_2$.

Совокупность мер в $\mathfrak{R}$ вместе с функцией $L(\mu_1, \mu_2)$ в качестве расстояния образует метрическое пространство, которое будет обозначаться через $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$. Это пространство обладает достаточно простым строением, описываемым в теореме 1.1. Ее формулировке мы предпошлем следующее

Определение. *Множество* $\mathfrak{N}$ *мер в* $\mathfrak{R}$ *удовлетворяет условию* (ϰ), *если* (ϰ.1) *значения* $\mu(\mathfrak{R})$ $\mu \in \mathfrak{N}$ *ограничены в совокупности*, (ϰ.2) *для любых заданных* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *существует конечная система точек* $X_{\varepsilon,\delta}$, *для*

которой при всех $\mu \in \mathfrak{M}$

$$\mu(\mathfrak{R} \setminus S(X_{\varepsilon,\delta}, \delta)) < \varepsilon^*.$$

Замечание 1. Условие (ж.2) равносильно условию (ж.2′): для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт K_ε такой, что при всех $\mu \in \mathfrak{M}$

$$\mu(\mathfrak{R} \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

В самом деле, если выполняется (ж.2′), то можно взять в качестве $X_{\varepsilon,\delta}$ какую-либо δ-сеть в K_ε. Если выполняется (ж.2), то можно взять в качестве K_ε множество

$$\bigcap_{s=1}^{\infty} [S(X_{\varepsilon_s,\delta_s}, \delta_s)],$$

где $\varepsilon_s = \varepsilon \cdot 2^{-s}$, $\delta_s = s^{-1}$.

Замечание 2. Следствие из теоремы 1.4 показывает, что всякое конечное множество мер удовлетворяет условию (ж). Поэтому последовательность $\{\mu_n\}$ мер удовлетворяет условию (ж) тогда и только тогда, когда для любых заданных $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдутся номер $n_0(\varepsilon, \delta)$ и конечная система точек $X_{\varepsilon,\delta}$ такие, что при всех $n \geqslant n_0$ $\mu_n(\mathfrak{R} \setminus S(X_{\varepsilon,\delta}, \delta)) < \varepsilon$.

Теорема 1.11. *Пространство* $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ *есть полное сепарабельное метрическое пространство и L-сходимость эквивалентна слабой сходимости мер.*

Лемма 1.2. *Если при однозначном и измеримом отображении* f *пространства* $\mathfrak{R}$ *в себя множество* $H = \{x : \rho(f(x), x)) < \delta\}$ *имеет* μ*-меру большую чем* $1 - \varepsilon$, *то расстояние между* μ^f *и* μ *не больше* $\lambda = \max(\varepsilon, \delta)$.

Доказательство леммы. Из очевидных включений $F \cap H \subseteq f^{-1}(F^\delta)$, $f^{-1}(F) \cap H \subseteq F^\delta$ выводим неравенства

$$\mu(F) < \mu(F \cap H) + \varepsilon \leqslant \mu(f^{-1}(F^\delta)) + \varepsilon = \mu^f(F^\delta) + \varepsilon$$

и

$$\mu^f(F) < \mu(f^{-1}(F) \cap H) + \varepsilon \leqslant \mu(F^\delta) + \varepsilon, \text{ ч. тр. д.}$$

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_N$ — какие-либо точки $\mathfrak{R}$, $X_j = \{x_1, x_2, \ldots, x_j\}$. Определим отображение $\psi = \psi(x_0, X_N, \delta)$, полагая

$$\psi(x) = x_0 \text{ при } x \in T_0 = \mathfrak{R} \setminus S(X_N, \delta),$$
$$\psi(x) = x_j \text{ при } x \in T_j = S(x_j, \delta) \setminus S(X_{j-1}, \delta),\ 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Следствие из леммы 1.2. *Если*

$$\mu(\mathfrak{R} \setminus S(X_N, \delta)) < \varepsilon,$$

то для определенного выше отображения ψ

$$L(\mu^\psi, \mu) \leqslant \lambda = \max(\varepsilon, \delta).$$

Дальнейшее доказательство теоремы 1.11 разобьем для удобства на отдельные части.

А. *L*-сходимость эквивалентна слабой сходимости.

---

* Условие (ж) аналогично условию «отсутствия ускользающей нагрузки» из работы [1.2].

Лемма 1.3. *Всякая слабо сходящаяся к некоторой мере последовательность мер в* $\mathfrak{R}$ *удовлетворяет условию* (ж).

Доказательство леммы. Условие (ж.1) выполняется, так как $\mu_n \Rightarrow \mu$ влечет $\mu_n(\mathfrak{R}) \to \mu(\mathfrak{R})$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ заданы, K' — компакт, для которого $\mu(\mathfrak{R} \setminus K') \leqslant \varepsilon/2$. Граница λ-окрестности K' может иметь положительную μ-меру для не более чем счетного множества значений λ. Поэтому при некотором $\lambda_0 < \delta/2$ $F_0 = S(K', \lambda_0)$ будет μ-множеством непрерывности. В силу выбора K' при $n \geqslant n_0(\varepsilon, \delta)$

$$\mu_n(F_0) \geqslant \mu(F_0) - \frac{\varepsilon}{4} \geqslant \mu(\mathfrak{R}) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \geqslant \mu_n(\mathfrak{R}) - \varepsilon.$$

Возьмем в K' какую-либо $\delta/2$-сеть X. Так как

$$F_0 \subseteq S(X, \delta), \text{ то } \mu_n(S(X, \delta)) \geqslant \mu_n(\mathfrak{R}) - \varepsilon \text{ при } n \geqslant n_0,$$

ч. тр. д.

Пусть $L(\mu_n, \mu_0) \to 0$ при $n \to \infty$, F — произвольное замкнутое множество. Тогда при каждом $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_n}\, \mu_n(F) \leqslant \mu_0(F^\varepsilon) + \varepsilon.$$

Последнее неравенство в пределе при $\varepsilon \to 0$ переходит в неравенство $\overline{\lim_n}\, \mu_n(F) \leqslant \mu_0(F)$. Кроме того, как нетрудно показать, $\mu_n(\mathfrak{R}) \to \mu_0(\mathfrak{R})$. По теореме 1.2′ $\mu_n \Rightarrow \mu_0$, ч. тр. д.

Допустим, что $\mu_n \Rightarrow \mu_0$. По лемме 1.3 можно выбрать конечную систему точек $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, для которой при $\delta' = \varepsilon/5$ и всех $n \geqslant 0$ — мера множества $\mathfrak{R} \setminus S(X, \delta')$ меньше $2\varepsilon/5$. Надлежащим выбором числа δ в интервале $(\delta', 2\delta')$ можно добиться того, чтобы все сферы $S(x_j, \delta)$, $1 \leqslant j \leqslant N$ были μ_0-множествами непрерывности. Дополняя систему X произвольной точкой $x_0 \in \mathfrak{R}$, построим отображение ψ пространства $\mathfrak{R}$ в себя, как указано в следствии из леммы 1.2. Тогда, во-первых, участвующие в определении ψ множества T_j будут μ_0-множествами непрерывности (лемма 1.1), и, следовательно, можно найти n_0 столь большое, что при $n \geqslant n_0$ каждая из разностей $\mu_n(T_j) - \mu_0(T_j)$ будет по абсолютной величине меньше, чем $\varepsilon/5(N+1)$. Во-вторых, при всех $n \geqslant 0$ $L(\mu_n^\psi, \mu_n) \leqslant 2\varepsilon/5$. Почти очевидно, что расстояние между сосредоточенными в точках x_j мерами μ_n^ψ и μ_0^ψ не превосходит суммы по j от 0 до N величин

$$|\, \mu_n^\psi(x_j) - \mu_0^\psi(x_j)\,| = |\, \mu_n(T_j) - \mu_0(T_j)\,|,$$

т. е. при $n \geqslant n_0$ не превосходит $\varepsilon/5$. Таким образом, при $n \geqslant n_0$

$$L(\mu_n, \mu_0) \leqslant L(\mu_n, \mu_n^\psi) + L(\mu_n^\psi, \mu_0^\psi) + L(\mu_0^\psi, \mu_0) < \varepsilon,$$

ч. тр. д.

Б. Обозначим через $\mathfrak{D}'_\Lambda$ совокупность мер в $\mathfrak{R}$, которые определяются следующим способом: из некоторого счетного, всюду плотного в $\mathfrak{R}$ множества Λ выбирают конечное число элементов $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(s)}$; каждому $x_{(j)}$ ставят в соответствие рациональное число $r_{(j)} > 0$ и полагают

$$\mu'(A) = \sum_{x_{(j)} \in A} r_{(j)}.$$

Докажем, что множество $\mathfrak{D}'_\Lambda$ (очевидно, счетное) всюду плотно в $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$. Пусть $\mu \in \mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ и $\varepsilon > 0$ — заданное число. Подберем конечную систему точек, принадлежащих Λ так, чтобы μ-мера суммы их $\varepsilon/2$-окрестностей была больше $\mu(\mathfrak{R}) - \varepsilon/2$. Дополним эту систему произвольной точкой $x_0 \in \Lambda$ и определим отображение ψ как в следствии из леммы 1.2. Тогда расстояние между мерой μ и сосредоточенной в конечном числе точек из Λ мерой μ^ψ будет не больше $\varepsilon/2$. Как легко видеть, найдется мера $\mu' \in \mathfrak{D}'_\Lambda$, сосредоточенная в тех же точках, что и μ^ψ, для которой $L(\mu^\psi, \mu') \leqslant \varepsilon/2$. Для меры μ' $L(\mu, \mu') \leqslant \varepsilon$, ч. тр. д.

В. Полнота пространства $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$.

Лемма 1.4. *Всякая L-фундаментальная последовательность* $\{\mu_n\}$ *удовлетворяет условию* (*).

Доказательство леммы. В высказанных предположениях последовательность чисел $\mu_n(\mathfrak{R})$ фундаментальна, а потому и ограничена; (*. 1) доказано. Пусть теперь $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ — заданные числа. Определим n_0 из неравенства

$$\sup_{p>0} L(\mu_{n_0}, \mu_{n_0+p}) < \lambda = \min(\varepsilon/3, \delta/2)$$

и выберем конечную систему X точек $\mathfrak{R}$, для которой

$$\mu_{n_0}(\mathfrak{R} \setminus S(X, \delta/2)) < \varepsilon/3.$$

При $p > 0$ величина $\mu_{n_0+p}(\mathfrak{R})$ не превосходит $\mu_{n_0}(\mathfrak{R}) + \lambda$. Но

$$\mu_{n_0}(\mathfrak{R}) + \lambda \leqslant \mu_{n_0+p}([S(X, \delta/2)]^\lambda) + \lambda + \lambda + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.7}$$

Соотношения $[S(X, \delta/2)]^\lambda \subseteq S(X, \delta)$, $2\lambda + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$, позволяют заменить неравенство (1.7) следующим

$$\mu_{n_0+p}(\mathfrak{R}) < \mu_{n_0+p}(S(X, \delta)) + \varepsilon.$$

Мы видим, что (*.2) выполняется. Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Если последовательность* $\{\mu_n\}$ *L-фундаментальна, то, каков бы ни был непрерывный функционал* f, *последовательность* $\{\mu_n^f\}$ *мер на прямой фундаментальна в метрике Леви.*

Доказательство леммы. Пусть $h > 0$ задано. Выберем, в соответствии с леммой 1.4, компакт $K_{h/2}$, для которого при всех n $\mu_n(\mathfrak{R} \setminus K_{h/2}) < h/2$. Легко видеть, что можно взять δ_0 столь малым, что разность значений $f(x)$ в любых двух точках x, $x' \in K_{h/2}^{\delta_0}$, $\rho(x, x') < \delta_0$, по абсолютной величине будет $\leqslant h/2$. Тогда при каждом действительном α и n столь больших ($n \geqslant n_0$), что

$$\sup_{n_1 n_2 \geqslant n} L(\mu_{n_1}, \mu_{n_2}) < \delta_1 = \min(\delta_0, h/2),$$

справедливы оценки ($G_\alpha = \{x : f(x) < \alpha\}$, $F_\alpha = [G_\alpha]$)

$$\mu_{n_1}(F_\alpha) \leqslant \mu_{n_1}(F_\alpha \cap K_{h/2}) + h/2 \leqslant$$
$$\leqslant \mu_{n_2}((F_\alpha \cap K_{h/2})^{\delta_1}) + \delta_1 + \frac{h}{2} \leqslant \mu_{n_2}(G_{\alpha+h}) + h.$$

Следовательно, «расстояние Леви» между $\mu^f_{n_1}$ и $\mu^f_{n_2}$ при $n_1,\ n_2 \geqslant n_0$ не превосходит заданного $h > 0$, ч. тр. д.

Из полноты пространства конечных мер на прямой в метрике Леви ([1.1], стр. 44) вытекает, что для каждого непрерывного функционала f существует мера на прямой $\mu^{(f)}$ такая, что $\mu^f_n \Rightarrow \mu^{(f)}$. Из последнего соотношения можно заключить, что для каждого непрерывного и ограниченного функционала f существует

$$l(f) = \lim_n \int_{\mathfrak{R}} f(x)\, d\mu_n$$

(ср. доказательство теоремы 1.8). По теореме 1.3 существует заряд m, к которому сходятся слабо заряды m_{μ_n}. Пусть $\varepsilon > 0$ задано и K_ε такой компакт, что при всех n

$$\mu_n(K_\varepsilon) = m_{\mu_n}(K_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

По теореме 1.2 $m(K_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon$. В силу теорем 1.4 и 1.5 заряд m можно продолжить в меру μ. При этом

$$\int_{\mathfrak{R}} f(x)\, dm = \int_{\mathfrak{R}} f(x)\, d\mu.$$

Так как

$$\lim_n \int_{\mathfrak{R}} f(x)\, d\mu_n = \int_{\mathfrak{R}} f(x)\, dm,$$

то $\mu_n \Rightarrow \mu$, $L(\mu_n, \mu) \to 0$. Полнота пространства $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ доказана. Тем самым закончено доказательство теоремы 1.11.

§ 1.5. Условия компактности подмножеств $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$

Теорема 1.12. *Для того, чтобы множество* $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ *было компактным, необходимо и достаточно условие* (*).

Доказательство. Необходимость. Пусть числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ заданы. Положим $2\lambda = \min(\delta/2, \varepsilon/3)$ и возьмем в $\mathfrak{N}$ λ-сеть $\mathfrak{N}'$. Выберем, далее, конечную систему точек X, для которой $\mu'(S(X, \delta/2)) \geqslant \geqslant \mu'(\mathfrak{R}) - \lambda$ при всех $\mu' \in \mathfrak{N}'$. Для любой $\mu \in \mathfrak{N}$ найдется $\mu' \in \mathfrak{N}'$ с $L(\mu, \mu') \leqslant \lambda$. Для μ' выполняются неравенства

$$\mu'(\mathfrak{R}) - \lambda \leqslant \mu'([S(X, \delta/2)]) < \mu\left(S\left(X, \frac{\delta}{2} + 2\lambda\right)\right) + 2\lambda$$

и

$$\mu'(\mathfrak{R}) > \mu(\mathfrak{R}) - 2\lambda.$$

Из этих неравенств следует, что какова бы ни была мера $\mu \in \mathfrak{N}$,

$$\mu(S(X, \delta)) > \mu(\mathfrak{R}) - \varepsilon,$$

ч. тр. д.

Достаточность. Дополняя систему точек $X_{\varepsilon/2,\ \varepsilon/2}$ (см. стр. 187) произвольной точкой $x_0 \in \mathfrak{R}$, построим отображение $\psi = \psi(x_0, X_{\varepsilon/2,\ \varepsilon/2}, \varepsilon/2)$ (см. следствие из леммы 1.2). Тогда для любой $\mu \in \mathfrak{N}$ получим $L(\mu, \mu^\psi) < \varepsilon/2$. В силу (*)

$$\sup_{\mu \in \mathfrak{N}} \mu^\psi(\mathfrak{R}) = \sup_{\mu \in \mathfrak{N}} \mu(\mathfrak{R}) < \infty.$$

Из последнего соотношения и того, что все меры μ^ψ сосредоточены в одних и тех же точках (которых конечное число), легко вывести, что семейство $\mathfrak{N}^\psi = \{\mu^\psi\}$, $\mu \in \mathfrak{N}$ является вполне ограниченным. Выбирая в $\mathfrak{N}^\psi$ $\varepsilon/2$-сеть, мы видим, что она в то же время служит ε-сетью в $\mathfrak{N}$. Так как $\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ полно, то из сказанного вытекает компактность $\mathfrak{N}$.

§ 1.6. Меры в пространстве Гильберта

Для конечных мер в линейных пространствах можно ввести понятие характеристического функционала (х. ф.), непосредственно обобщающее понятие характеристической функции конечномерного распределения. Естественно возникает вопрос о том, в какой степени это понятие пригодно для изучения слабой сходимости мер. Частичный ответ на этот вопрос дают результаты работ Е. Мурье и Р. Форте (см. например, [1.5] и [1.6]).

Мы предполагаем, что $\mathfrak{R}$ есть сепарабельное пространство Гильберта. Характеристический функционал меры μ в $\mathfrak{R}$ определяется, как известно (см. [1.6] и [1.7]), формулой

$$\chi(f;\ \mu) = \int_{\mathfrak{R}} e^{i(f,\,x)}\, d\mu,$$

где (f, x) — скалярное произведение элементов f и $x \in \mathfrak{R}$. Из свойств х. ф. отметим здесь лишь следующие: 1. мера однозначно восстанавливается по своему х. ф., 2. при композиции мер соответствующие х. ф. перемножаются, т. е. если

$$\mu(A) = \int_{\mathfrak{R}} \mu_2(A - x)\, d\mu_1,$$

то

$$\chi(f;\ \mu) = \chi(f;\ \mu_1)\,\chi(f;\ \mu_2).$$

Лемма 1.6. *Если последовательность* $\{\mu_n\}$ *мер в* $\mathfrak{R}$ *слабо компактна и* $\chi(f;\ \mu_n) \to \chi(f)$ *при каждом* $f \in \mathfrak{R}$, *то* $\mu_n \Rightarrow \mu$ *и* $\chi(f) = \chi(f;\ \mu)$.

Доказательство. Допустим, что последовательность $\{\mu_n\}$ не является сходящейся. Тогда найдутся две ее подпоследовательности Z_1 и Z_2, сходящиеся соответственно к пределам μ^1 и μ^2, $\mu^1 \neq \mu^2$. Из определения слабой сходимости вытекает, что при каждом $f \in \mathfrak{R}$

$$\lim_{n,\ \mu_n \in Z_i} \chi(f;\ \mu_n) = \chi(f;\ \mu^i), \quad i = 1, 2.$$

В силу условий леммы должно иметь место равенство

$$\chi(f;\ \mu^1) = \chi(f;\ \mu^2) = \chi(f),$$

т. е. равенство $\mu^1 = \mu^2$, что противоречит сделанному выше допущению. Лемма доказана.

Выберем теперь какую-либо систему координат, т. е. полную ортонормированную последовательность $\{e_i\}$ векторов $\mathfrak{R}$. Обозначим через x_i i-ую координату вектора x, $x_i = (x, e_i)$ и через $r_N^2(x)$ — сумму по i от N до ∞ величин x_i^2.

Простой достаточный признак компактности содержит

Теорема 1.13. *Совокупность* $\mathfrak{N}$ *мер в* $\mathfrak{R}$, *для которой*

а) $\sup\limits_{\mu\in\mathfrak{N}} \mu(\mathfrak{R}) < \infty$,

б) $\lim\limits_{N} \sup\limits_{\mu\in\mathfrak{N}} \int\limits_{\mathfrak{R}} r_N^2(x)\, d\mu = 0$,

слабо компактно.

Доказательство. Обозначим величину, стоящую под знаком предела в условии б) теоремы, через $\psi(N)$. Подберем последовательность $N_k \uparrow \infty$ целых чисел и последовательность $\Lambda_k \to \infty$ положительных чисел так, чтобы сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Lambda_k \psi(N_k)$ не превосходила ε. Для компакта

$$K = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, \quad E_k = \{x : r_{N_k}^2(x) \leqslant \Lambda_k^{-1}\},$$

при всех $\mu \in \mathfrak{N}$ справедливы неравенства

$$\mu(\mathfrak{R} \setminus K) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mathfrak{R} \setminus E_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k \psi(N_k) \leqslant \varepsilon.$$

По теореме 1.12 семейство $\mathfrak{N}$ слабо компактно.

В теореме (1.13) мы ограничились мерами μ, для которых

$$\int\limits_{\mathfrak{R}} \| x \|^2 \, d\mu < \infty. \tag{1.8}$$

Для таких мер можно ввести (см. [1.5]) вектор M_μ и оператор S_μ, имеющие тот же смысл, что и математическое ожидание и матрица вторых моментов конечномерного случайного вектора. Характеристики M_μ и S_μ определяются равенствами

$$(M_\mu, f) = \int\limits_{\mathfrak{R}} (x, f)\, d\mu, \quad (S_\mu f, f) = \int\limits_{\mathfrak{R}} (x, f)^2\, d\mu.$$

Равенство

$$(S'_\mu f, f) = \int\limits_{\mathfrak{R}} (x - M_\mu, f)^2\, d\mu$$

определяет оператор S'_μ, аналогичный матрице центральных вторых моментов конечномерного распределения. Операторы S_μ и S'_μ будут при этом а) линейными, б) симметрическими, в) положительными, г) вполне непрерывными с конечным следом*. В системе координат $\{e_i\}$ вектор M_μ имеет координаты

$$M_{\mu,\, i} = \int\limits_{\mathfrak{R}} x_i\, d\mu,$$

---

* Для краткости такого рода операторы будут именоваться S-операторами.

а операторам S_μ и S'_μ соответствуют матрицы с элементами

$$a_{i,\,j} = (S_\mu e_j,\ e_i) = \int\limits_{\mathfrak{R}} x_i x_j d\mu$$

и

$$a'_{i,\,j} = (S_\mu e_j,\ e_i) = \int\limits_{\mathfrak{R}} (x_i - M_{\mu,\,i})(x_j - M_{\mu,\,j})\, d\mu.$$

Если меры μ_1 и μ_2 удовлетворяют условию (1.8) и μ — их композиция, то, как нетрудно показать, μ удовлетворяет (1.8) и

$$S'_\mu = S'_{\mu_1} + S'_{\mu_2}$$

(теорема о сложении «дисперсий»).

Условие б) теоремы 1.13 мы можем записать теперь в следующей форме:

$$\text{б}') \quad \lim_N \sup_{\mu \in \mathfrak{M}} \sum_{i=N}^{\infty} (S_\mu e_i, e_i) = 0. \tag{1.9}$$

Рассмотрим два примера, иллюстрирующие применение леммы 1.6 и теоремы 1.13.

Пример 1. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых случайных векторов со значениями из $\mathfrak{R}$. Предположим, что все эти векторы имеют одно и то же распределение P, «математические ожидания», равные нулевому вектору и конечные математические ожидания квадрата нормы:

$$\mathbf{M}\,\xi_i = 0, \quad \mathbf{M} \parallel \xi_i \parallel^2 < \infty.$$

Обозначим через η_n «нормированную сумму» векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}}$$

и через P_n — распределение η_n. Как легко видеть, при всех n

$$S_{P_n} = S_P.$$

Далее, х. ф. $\chi(f;\ P_n)$ при каждом $f \in \mathfrak{R}$ сходится к выражению

$$\exp\left[-\frac{1}{2}(S_P f,\ f)\right]. \tag{1.10}$$

Это можно установить, например, следующим способом: при каждом $f \in \mathfrak{R}$ случайные величины $(\xi_n,\ f)$ одинаково распределены со средним 0 и конечной дисперсией. Величина $(\eta_n,\ f)$ есть нормированная сумма первых n величин последовательности $\{(\xi_n,\ f)\}$. Поэтому ее характеристическая функция, равная $\chi(uf;\ P_n)$, сходится к нормальной характеристической функции

$$\exp\left[-\frac{u^2}{2}\,\mathbf{M}\,(\xi_n,\ f)^2\right] = \exp\left[-\frac{u^2}{2}(S_P f,\ f)\right].$$

Отсюда при $u = 1$ получим требуемое.

Принимая во внимание, что S_P есть S-оператор и применяя теорему 1.13 (с заменой б на б′) и лемму 1.6, мы приходим к такому выводу: последовательность $\{P_n\}$ слабо сходится при $n \to \infty$ к распределению с х. ф. (1.10). Этот результат получен впервые (иным путем) в [1.5] (см. также [1.6]). Предельное распределение (1.10) относится к классу *нормальных* распределений в $\mathfrak{R}$. В соответствии с терминологией работ [1.7] и [1.5] нормальным называется всякое распределение в $\mathfrak{R}$, х. ф. которого имеет вид

$$\exp\{im(f) - \tfrac{1}{2}(Tf, f)\}, \qquad (1.11)$$

где $m(f)$ — линейный функционал и T — симметрический линейный оператор. Выражение (1.11) будет х. ф. распределения в $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда T есть S-оператор и функционал $m(f)$ непрерывен (см. [1.5]).

Пример 2. Рассмотрим последовательность серий

$$\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots, \xi_{n,k_n}$$

независимых в каждой серии случайных величин, подчиненных дополнительным условиям $\mathbf{M}\xi_{n,k} = 0$, $\mathbf{D}\xi_{n,k} > 0$, $\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{D}\xi_{n,k} = 1$. Определим случайные элементы $\xi^*_{n,k}$ со значениями в $L^2(0,1)$, полагая

$$\xi^*_{n,k}(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant t_{n,k-1}, \\ \xi_{n,k}, & t > t_{n,k-1}, \end{cases}$$

где $t_{n,0} = 0$ и $t_{n,k} = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{D}\xi_{n,j}$, $1 \leqslant k \leqslant k_n$. Пусть

$$\zeta^*_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi^*_{n,k}$$

и P_n — распределение случайного элемента ζ^*_n. Как нетрудно видеть,

$$(S_{P_n} f, f) = \sum_{k=1}^{k_n} \Big(\int_{t_{n,k-1}}^{1} f\,dt \Big)^2 \cdot \mathbf{D}\xi_{n,k}.$$

Для полной ортонормированной системы векторов в $L^2(0,1)$

$$e_j = (2\pi)^{-1/2} \sin(j\pi t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots$$

мы имеем

$$\Big(\int_{t_{n,n-1}}^{1} (2\pi)^{-1/2} \sin(j\pi t)\,dt \Big)^2 \leqslant 2j^{-2}\pi^{-2}$$

и потому при всех n

$$(S_{P_n} e_j, e_j) \leqslant 2j^{-2}\pi^{-2}.$$

По теореме 1.13 [с заменой б на б′] последовательность $\{P_n\}$ слабо компактна. Условия сходимости х. ф. $\chi(f; P_n)$ к некоторой функции $\chi(t)$

проще всего проверить * с помощью известных теорем о сходимости распределений сумм независимых случайных величин к неограниченно-делимым предельным распределениям (см. [1.1], гл. 4). Так, например, если величины $\xi_{n,k}$ внутри каждой серии одинаково распределены, $k_n \to \infty$ и неубывающие функции

$$k_n \int_{-\infty}^{u} x^2 dF_{\xi_{n,1}}(x)$$

слабо сходятся к неубывающей функции $G(u)$, то при $n \to \infty$

$$\chi(f;\ P_n) \to \exp \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^1 (e^{ix\varphi(\tau,\ f)} - 1 - ix\varphi(\tau, f)) d\tau \right) \frac{dG(x)}{x^2}, \qquad (1.12)$$

где

$$\varphi(\tau,\ f) = \int_{\tau}^{1} f(t)\, dt.$$

По лемме (1.6) распределения P_n слабо сходятся при $n \to \infty$ к распределению с х. ф., определяемым соотношением (1.12). К разобранному примеру мы вернемся в дальнейшем, после того как будут развиты другие методы исследования.

Мы приведем теперь необходимые и достаточные условия компактности подмножеств $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$, выраженные в терминах х. ф.

Теорема 1.14. *Для компактности семейства $\mathfrak{N}$ мер в $\mathfrak{R}$ необходимы и достаточны условия*;

а) $$\sup_{\mu \in \mathfrak{N}} \chi(\theta;\ \mu) < \infty,$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

б) *для каждой меры $\mu \in \mathfrak{N}$ найдется S-оператор $S_{\mu,\varepsilon}$ такой, что*

$$\operatorname{Reel}(\chi(\theta;\ \mu) - \chi(f;\ \mu)) \leqslant (S_{\mu,\varepsilon} f,\ f) + \varepsilon,$$

в) *нормы операторов $S_{\mu,\varepsilon}$ ограничены постоянной M_ε,*

г) $$\lim_N \sup_{\mu \in \mathfrak{N}} \sum_{i=N}^{\infty} (S_{\mu,\varepsilon} e_i,\ e_i) = 0.$$

Доказательство. Необходимость а) вытекает из теоремы 1.12 (ж.1) и равенства $\mu(\mathfrak{R}) = \chi(\theta;\ \mu)$. Необходимость остальных условий следует из теоремы 1.12 и (ж.2). В самом деле, подберем компакт $K \subset \mathfrak{R}$ так, что

$$\sup_{\mu \in \mathfrak{N}} \mu(\mathfrak{R} \setminus K) < \varepsilon,$$

и положим

$$\psi_\varepsilon(N) = \frac{1}{2} \sup_{x \in K} r_N^2(x), \quad M_\varepsilon = \psi_\varepsilon(1) \cdot \sup_{\mu \in \mathfrak{N}} \chi(\theta;\ \mu).$$

---

* Используя равенство $(f,\ \zeta_n^*) = \sum_{n=1}^{k_n} (f_1,\ \xi_{n,k}^*)$.

Действительная часть разности $\chi(\theta;\ \mu) - \chi(f;\ \mu)$ не превосходит

$$\int_K (1 - \cos(f,\ x))\, d\mu + \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\int_K (f,\ x)^2\, d\mu + \varepsilon.$$

Оператор $S_{\mu,\,\varepsilon}$, определяемый из равенства

$$(S_{\mu,\,\varepsilon} f,\ f) = \frac{1}{2}\int_K (f,\ x)^2\, d\mu,$$

в системе координат $\{e_j\}$ задается матрицей $(a_{i,\,j})$ с элементами

$$a_{i,\,j} = \frac{1}{2}\int_K x_i\, x_j\, d\mu.$$

Поэтому $\| S_{\mu,\,\varepsilon} \|^2$ не превосходит

$$\sum_{i,\,j} |\, a_{i,\,j}\,|^2 \leqslant \frac{1}{4}\sum_{i,\,j}\left(\int_K x_i^2 d\mu\right)\left(\int_K x_j^2 d\mu\right) \leqslant M_\varepsilon^2.$$

Далее

$$\sup_{\mu\in\mathfrak{M}} \sum_{i=N}^{\infty} (S_{\mu,\,\varepsilon} e_i,\ e_i) \leqslant \psi_\varepsilon(N) \to 0$$

при $n \to \infty$. Необходимость условий теоремы доказана.

Достаточность. Для сокращения записи рассмотрим частный случай, когда все меры, входящие в $\mathfrak{M}$, суть распределения.

Лемма 1.7. *Для компактности множества $\mathfrak{N}$ распределений в $\mathfrak{R}$ достаточно одновременное выполнение двух условий*:

а) *при каждом N*

$$\lim_{A\to\infty} \inf_{P\in\mathfrak{N}} P\{x:\ \max_{1\leqslant i<N} |\, x_i\,| \leqslant A\} = 1,$$

б)
$$\lim_{N} \sup_{P\in\mathfrak{N}} J_N(P) = 0,$$

где

$$J_N(P) = \int_{\mathfrak{R}} \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2} r_N^2(x)\right)\right) dP.$$

Замечание. Условия леммы и необходимы для компактности $\mathfrak{N}$.

Доказательство. Пусть ε и δ — заданные числа $(0 < \varepsilon,\ \delta \leqslant 1)$. Для значений δ, лежащих в отрезке $[0,1]$, $1 - e^{-\delta} \geqslant \delta/2$. Поэтому при $N \geqslant N_0(\varepsilon,\ \delta)$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2}{4} P\left\{x : \frac{1}{2} r_N^2(x) \geqslant \frac{\delta^2}{4}\right\} \leqslant J_N(P) \leqslant \frac{\varepsilon\delta^2}{16},$$

т. е.

$$P\left\{x : r_N^2(x) < \frac{\delta^2}{2}\right\} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Определим число A_0 из неравенства

$$\inf_{P\in\mathfrak{N}} P\{x:\ \max_{1\leqslant i<N} |\, x_i\,| \leqslant A_0\} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1.13)$$

и подберем конечную систему точек $x^1, x^2, \ldots, x^s \in \mathfrak{R}$ так, чтобы

$$x_i^j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, s;\ i \geqslant N_0 \tag{1.14}$$

и чтобы при всех x с $\max\limits_{1 \leqslant i < N} |x_i| \leqslant A_0$

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant s} \sum_{i=1}^{N-1} (x_i - x_i^j)^2 \leqslant \delta^2/2. \tag{1.15}$$

Вследствие соотношений (1.13—1.15)

$$\inf_{P \in \mathfrak{N}} P\left(\bigcup_{j=1}^{s} S(x^j,\ \delta)\right) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

По теореме (1.12) $\mathfrak{N}$ компактно.

Как нетрудно видеть, функция ψ, определяемая равенством

$$\psi(f_1,\ f_2, \ldots,\ f_{N-1};\ P) = \chi(f_1 e_1 + f_2 e_2 + \ldots + f_{N-1} e_{N-1};\ P),$$

есть характеристическая функция некоторого $N-1$-мерного распределения (а именно, совместного распределения первых $N-1$ координат вектора $x \in \mathfrak{R}$).

Лемма 1.8. *Для компактности множества $\mathfrak{N}$ распределений в $\mathfrak{R}$ достаточно одновременное выполнение двух условий:*

а) *при каждом N функции $\psi(\ldots; P)$ равностепенно непрерывны в начале координат;*

б) $$\limsup_{N} \sup_{\mu \in \mathfrak{N}} \lim_{p} J_{N,p}(1 - \operatorname{Reel} \chi(f_N e_N + \ldots + f_{N+p-1} e_{N+p-1})) = 0,$$

где

$$J_{N,p}(\ldots) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \int_{p \text{ раз}} \ldots \int (\ldots) \exp\left(-\frac{1}{2} r_{N,p}^2(f)\right) df_N \ldots df_{N+p-1}$$

и

$$r_{N,p}^2(f) = \sum_{i=N}^{N+p-1} f_i^2. \tag{16}$$

Замечание. Условия леммы и необходимы для компактности $\mathfrak{N}$.

Доказательство. Из равенства

$$1 - \exp\left\{-\frac{1}{2} r_{N,p}^2(x)\right\} = J_{N,p}\left(1 - \exp \sum_{j=N}^{N+p-1} x_j f_j\right)$$

интегрированием обеих его частей по мере P и перестановкой порядка интегрирования в правой части выводим, что интеграл

$$\int_{\mathfrak{R}} \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2} r_{N,p}^2(x)\right)\right) dP$$

равен выражению, стоящему под знаком $\lim\limits_{p}$ в условии б) леммы. Поэтому сам предел $\lim\limits_{p} J_{N,p}$ равен $J_N(P)$, т. е. условия б) в леммах 1.8 и

1.7 по существу совпадают. Это же верно и по отношению к условиям а) (случай произвольного N разбирается дословно так же, как и случай $N = 2$ в книге [1.1] § 13). Лемма доказана.

Теперь мы установим, что из условий теоремы 1.14 вытекают условия леммы 1.8. В самом деле, входящее в формулировку леммы 1.8 выражение $J_{N,\,p}(1 - \operatorname{Reel}\chi)$ не превосходит

$$J_{N,\,p}(S_{P,\,\varepsilon/2}\,f,\,f)) + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.16}$$

где

$$f = (0, \ldots, 0, f_N, \ldots, f_{N+p-1}, 0, \ldots).$$

Первое слагаемое в (1.16) равно, очевидно,

$$\sum_{i=N}^{N+p-1} (S_{P,\,\varepsilon/2}e_i, e_i)$$

и при достаточно больших N не превосходит $\varepsilon/2$. При этих N

$$\lim_{p}\sup_{P\in\mathfrak{N}} J_{N,\,p}(1 - \operatorname{Reel}\chi) \leqslant \varepsilon.$$

Равностепенная непрерывность функции $\psi(\ldots; P)$, $P \in \mathfrak{N}$, вытекает непосредственно из предположений б) и в) теоремы 1.14.

Доказательство теоремы 1.14 закончено.

ГЛАВА 2. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ФУНКЦИИ

§ 2.1. Случайные процессы и распределения в функциональных пространствах

Мы приступаем теперь к применению изложенных в главе 1 общих теорем к случайным функциям и случайным процессам. Как уже указывалось во введении, для целей настоящей работы наиболее подходит представление о случайной функции как о распределении вероятностей в том или ином функциональном пространстве.

К простейшим примерах случайных функций можно прийти, например, следующим образом. Пусть дан какой-либо $n+1$-мерный случайный вектор

$$\bar{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n),$$

т. е. дано, иными словами, распределение P в $n+1$-мерном эвклидовом пространстве R^{n+1}, точки которого суть

$$\bar{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_n),$$

и пусть

$$t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

какие-нибудь точки отрезка $[0,1]$. Определим непрерывную функцию

$$x^*(t;\ t_0,\ t_1, \ldots,\ t_n;\ b_0,\ b_1, \ldots,\ b_n),$$

или, короче, $x^*(t;\ t_i,\ b_i)$, равенствами

$$x^*(t;\ t_i;\ b_i) = b_k + (t - t_k)(t_{k+1} - t_k)^{-1}(b_{k+1} - b_k) \tag{2.1}$$

при

$$t_k \leqslant t < t_{k+1},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{2.2}$$

Распределение P с помощью отображения

$$\bar{b} \to x^*(t;\ t_i,\ b_i) \tag{2.3}$$

порождает распределение в пространстве $C[0,1]$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций с расстоянием

$$\rho(x,\ y) = \max_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)|.$$

Это распределение сосредоточено, очевидно, на линейном подпространстве пространства $C[0,1]$, состоящем из всех $x(t)$, линейно изменяющихся в интервалах $\Delta_k = (t_{k-1},\ t_k)$. Мы будем говорить часто, что задана «случайная ломаная 1» с «вершинами» $(t_i,\ \beta_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Подобно этому, определяя функцию $x^{**}(t;\ t_i;\ b_i)$ равенствами

$$x^{**}(t;\ t_i;\ b_i) = b_k \quad \text{при} \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \tag{2.4}$$

и

$$x^{**}(1;\ t_i;\ b_i) = b_n, \tag{2.5}$$

мы приходим к некоторому распределению в пространстве $D[0,1]$ функций с разрывами первого рода (см; дополнение 1); чтобы отличить этот случай от предыдущего, мы будем говорить о «случайной ломаной 2». «Случайные ломаные» широко используются в последующих главах.

Первый вопрос, связанный с представлением о случайной функции, как о распределении в функциональном пространстве — это вопрос о достаточных (или необходимых и достаточных) условиях для того, чтобы априори заданная система конечномерных распределений порождалась распределением в том или ином конкретном функциональном пространстве. Ответ на этот вопрос может быть получен в ряде случаев с помощью методов главы 1.

Пример 1. Допустим, что для системы согласованных конечномерных распределений

$$P^{t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n},\ t_i \in [0,1] \tag{2.6}$$

выполняется условие

$$\iint_{R^2} |x_2 - x_1|^a\, dP^{t_1,\ t_2} \leqslant k\,|t_2 - t_2|^{\alpha}, \tag{2.7}$$

где $a > 0$, $k > 0$, $\alpha > 1$ — некоторые постоянные. Тогда существует распределение в $C[0,1]$, конечномерные распределения которого совпадают с заданными. (Это лишь одна из возможных формулировок известного результата Колмогорова, см. [2.1].)

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем рассматривать каждое из распределений (2.6) как совместное распределение случайных величин $\omega(t_1)$, $\omega(t_2)$, $\ldots$, $\omega(t_n)$, определенных на поле вероятностей $(\Omega,\ \mathfrak{B},\ P)$, где Ω — совокупность заданных на отрезке $[0,1]$ действительных функций $\omega(t)$, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра, порожденная борелев-

скими цилиндрическими множествами, входящими в Ω ([2.2]). Условие (2.7) может быть тогда записано в виде

$$\mathbf{M}\,|\,\omega(t_2)-\omega(t_1)\,|^{\alpha}\leqslant k\,|\,t_2-t_1\,|^{\alpha}. \tag{2.8}$$

Обозначим через π_N отображение множества Ω в $C\,[0,1]$, которое переводит $\omega(t)\in\Omega$ в $x_N(t;\ \omega)\in C\,[0,1]$, где

$$x_N(t;\ \omega)=x^*(t;\ i\cdot 2^{-N};\ \omega(i\cdot 2^{-N})).$$

По построению имеем $x_N(t,\ \omega)=\pi_N x_{N+p}(t,\ \omega)$, $p\geqslant 0$, и

$$P^{\pi_N}=(P^{\pi_{N+p}})^{\pi_N}. \tag{2.9}$$

Оценим L-расстояние между $P^{\pi_{N-1}}$ и P^{π_N}. Мы имеем

$$P^{\pi_N}\{x:\rho(\pi_{N-1}x,\ x)>2\cdot 2^{-N\theta}\}=$$
$$=P\{\omega:\ \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\,|\,x_{N-1}(t;\ \omega)-x_N(t;\ \omega)\,|>2\cdot 2^{-N\theta}\}.$$

Так как

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\,|\,x_{N-1}(t;\ \omega)-x_N(t;\ \omega)\,|\leqslant$$
$$\leqslant 2\max_{i}\,|\,\omega(i\cdot 2^{-N})-\omega((i-1)\cdot 2^{-N})\,|$$

и при $\theta=(\alpha-1)/(a+1)$

$$P\{\omega:\,|\,\omega(i\cdot 2^{-N})-\omega((i-1)\cdot 2^{-N})\,|>2^{-N\theta}\}\leqslant$$
$$\leqslant(2^{-N\theta})^{-a}\cdot\mathbf{M}\,|\,\omega(i\cdot 2^{-N})-\omega((i-1)\cdot 2^{-N})\,|^{a}\leqslant k\cdot 2^{-N\theta}\cdot 2^{-N},$$

то при указанном значении θ

$$P^{\pi_N}\{x:\rho(\pi_{N-1}x,\ x)>2\cdot 2^{-N\theta}\}\leqslant k\cdot 2^{-N\theta}. \tag{2.10}$$

Из (2.9), (2.10) и леммы 1.2 вытекает, что

$$L(P^{\pi_{N-1}},\ P^{\pi_N})=O(2^{-N\theta}),$$

т. е. что последовательность $\{P^{\pi_N}\}$ распределений в $C\,[0,1]$ фундаментальна. По теореме 1.11 существует распределение P_* в $C\,[0,1]$ такое, что $P^{\pi_N}\Rightarrow P_*$. Если $t_1,t_2,\ldots,t_n$—какие-либо двоично-рациональные точки. то, с одной стороны, начиная с некоторого номера совместное P^{π_N}-распределение величин $x(t_1),\ x(t_2),\ldots,\ x(t_n)$ совпадает с $P^{t_1,\ t_2,\ldots,\ t_n}$. С другой стороны, P^{π_N}-распределение упомянутых величин должно сходиться к их P_*-распределению. Поэтому

$$P_*^{x(t_1),\ x(t_2),\ldots,\ x(t_n)}=P^{t_1,\ t_2,\ldots,\ t_n}. \tag{2.11}$$

Распространить равенство (2.11) на произвольные значения t не представляет затруднений. Мы не будем за этом останавливаться.

Пример 2. Рассмотрим приведенное в [2.4] условие того, чтобы «марковский процесс» имел разрывы только первого рода. Пусть фазовое пространство $U=\{u\}$ есть числовая прямая и «марковский процесс» определен начальным распределением

$$P^0(A),\ A\subseteq U \tag{2.12}$$

и переходными вероятностями

$$P(t_1, u_1; t_2, A),\ 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1. \tag{2.13}$$

Предположим, что переходные вероятности (2.13) удовлетворяют условию: при любых $u_1 \in U$ и t_1, t_2 с $|t_2 - t_1| \leqslant \delta$

$$P(t_1, u_1; t_2, \{u: |u - u_1| > \lambda\}) \leqslant \psi_\lambda(\delta), \tag{2.14}$$

где $\psi_\lambda(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$ и каждом фиксированном $\lambda > 0$.

При таком предположении, как установлено в работе [2.4], почти все траектории «процесса» имеют разрывы только первого рода. Несколько видоизменяя рассуждения, использованные в [2.4], можно показать, что при выполнении (2.14) существует распределение в пространстве $D[0,1]$, обладающее свойствами:

1. множество функций с разрывами первого рода (ф. р. п. р.) $\varphi \in D[0,1]$, непрерывных в какой-либо фиксированной точке $t_0 \in [0,1]$, имеет вероятность 1,

2. совместное распределение случайных величин

$$\varphi(t_1), \varphi(t_2), \ldots, \varphi(t_n),\ 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant 1$$

совпадает с определенным по распределениям (2.12) и (2.13).

§ 2.2. Условия компактности семейств распределений в $C[0,1]$

Из теоремы 1.12 и теоремы Арцела следует

Лемма 2.1. *Для компактности семейства $\mathfrak{N}$ распределений в $C[0,1]$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовали число M_ε и функция $\omega(\delta; \varepsilon) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, для которых*

1. $P\{x: |x(0)| < M_\varepsilon\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$,

2. $P\{x; \omega_x(\delta) \leqslant \omega(\delta; \varepsilon)$ *при всех* $\delta\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$

для всех $P \in \mathfrak{N}$. Здесь $\omega_x(\delta)$ — модуль непрерывности функции $x(t)$

$$\omega_x(\delta) = \sup_{|t'-t''| \leqslant \delta} |x(t'') - x(t')|.$$

Рассмотрим в качестве примера распределения в $C[0,1]$, подчиненные условию (2.7) [или (2.8) с заменой ω на x]. Пусть ε — какое-либо положительное число и $\lambda > 0$ выбрано таким образом, что

$$\gamma = \frac{\alpha - 1}{a} - \lambda > 0.$$

Положим

$$k^* = \frac{3}{1 - 2^{-\gamma}} \left(\frac{2^{-a\lambda}}{1 - 2^{-a\lambda}} \cdot \frac{2k}{\varepsilon} \right)^{1/a}.$$

Элементарный анализ условия (2.8) (в котором ω заменено на x) приводит к заключению, что верна

Лемма 2.2. *При выполнении условия* (2.8) *для совокупности $E \subseteq C[0,1]$ функций, модуль непрерывности $\omega_x(\delta)$ которых удовлетворяет неравенству*

$$\omega_x(\delta) \leqslant \omega(\delta; \varepsilon) = k^* \delta^\gamma,$$

имеем

$$P(\varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следствие из леммы 2.2. *Если для всех распределений, принадлежащих некоторому множеству* $\mathfrak{N}$, *выполняется условие* (2.8) *с одними и теми же постоянными* a, k, α, *и если, кроме того, множество распределений на прямой* $P^{x(0)}$, $P \in \mathfrak{N}$ *компактно, то* $\mathfrak{N}$ *компактно в смысле слабой сходимости.*

Теорема 2.1. *Если для последовательности* $\{P_n\}$ *распределений в* $C[0, 1]$ а) *имеет место условие* (2.8) *с одними и теми же для всех* n *постоянными* a, k, α, б) *конечномерные распределения сходятся к некоторым предельным, то последовательность* $\{P_n\}$ *слабо сходится к распределению* P, *конечномерные распределения которого совпадают с указанными выше предельными распределениями.*

В качестве второго примера возьмем содержащееся в [2.3] условие непрерывности марковского «случайного процесса» с вероятностью единица. В обозначениях примера 2 § 2.1 это условие выглядит следующим образом:

$$P(t_1, u_1; t_2, \{u: |u - u_1| > \lambda\}) \leqslant \delta\psi_\lambda(\delta), \tag{2.15}$$

где $\psi_\lambda(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$ и каждом фиксированном $\lambda > 0$. При выполнении (2.15) существует распределение в $C[0, 1]$, конечномерные распределения которого совпадают с вычисляемыми по вероятностям (2.12) и (2.13). Аналогом леммы 2.1 является

Лемма 2.3. *При каждом* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $\omega(\delta, \varepsilon) \downarrow 0$ *при* $\delta \downarrow 0$, *зависящая только от функций* $\psi_\lambda(\delta)$, *для которой множество*

$$\{x: \omega_x(\delta) \leqslant \omega(\delta, \varepsilon) \text{ при всех } \delta\}$$

имеет вероятность не меньше, чем $1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Построение. Выбираем последовательность $\{m_j\}$ положительных чисел и последовательность $\{\lambda_j\}$ целых чисел ($\lambda_j \downarrow 0$, $m_j \uparrow \infty$ при $j \to \infty$) так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi_{\lambda_j}(m_j^{-1}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

За функцию $\omega(\delta, \varepsilon)$ мы можем принять любую выпуклую кверху функцию, подчиненную дополнительным требованиям

1. $\omega(\delta; \varepsilon) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$,
2. $\omega(\delta; \varepsilon) \geqslant 4m_1\lambda_1$ при $\delta \geqslant m_1^{-1}$,
3. $\omega(m_{k+1}^{-1}, \varepsilon) \geqslant 8\lambda_k$ при $k = 1, 2, \ldots$

Из леммы 2.3 можно получить следствия, сходные с теми, которые выведены из леммы 2.2. Мы не будем этим заниматься.

§ 2.3. Условия компактности семейств распределений в $D[0,1]$ *

Основной признак компактности вытекает из теоремы 2 дополнения 1 и теоремы 1.12.

Лемма 2.4. *Для компактности семейства* $\mathfrak{N}$ *распределений в* $D[0,1]$ *необходимо и достаточно, чтобы при любом* $\varepsilon > 0$ *существовали числа*

* В этом параграфе используются понятия и обозначения, смысл которых разъяснен в дополнении 1.

M_ε и δ_ε и функция $\omega(\delta, \varepsilon) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, такие, что для всех $P \in \mathfrak{N}$

$$1.\ P\{\varphi: \sup_{t\in[0,1]} |\varphi| \leqslant M_\varepsilon\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.16}$$

$$2.\ P\{\varphi: \widetilde{\omega}_\varphi(\delta) \leqslant \omega(\delta, \varepsilon) \text{ при всех } \delta \leqslant \delta_\varepsilon\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.17}$$

Мы исследуем теперь более детально случай марковских процессов, подчиненных условию (2.14).

Теорема 2.2. *Соотношение* (2.14) *влечет за собой* (2.17), *причем число δ_ε и функция $\omega(\delta, \varepsilon)$ зависят только от ε и функций $\psi_\lambda(\delta)$.*

Доказательство теоремы 2.2. Пусть $\varphi \in D[0,1]$, λ — положительное число и Δ — какой-либо интервал с началом s и концом t $(0 \leqslant s < t \leqslant 1)$ (под интервалами мы понимаем здесь открытые и замкнутые интервалы, а также полуинтервалы). Положим

$$\tau_0(\varphi;\ \Delta) = s.$$

Если $\omega_\varphi(\Delta) > \lambda$, то мы определяем

$$\tau_1(\varphi;\ \Delta) = \inf\{\tau : \tau \in \Delta,\ \omega_\varphi([\tau_0,\ \tau] \cap \Delta) > \lambda\}.$$

Если $\omega_\varphi((\tau_1,\ t] \cap \Delta) > \lambda$, то мы определяем

$$\tau_2(\varphi;\ \Delta) = \inf\{\tau : \tau \in \Delta,\ \omega_\varphi((\tau_1,\ \tau] \cap \Delta) > \lambda\}$$

и т. д. После некоторого конечного числа $j = j(\varphi;\ \Delta,\ \lambda)$ шагов процесс построения величин τ_i оборвется.

Лемма 2.5. *При любых $\lambda > 0$, $\Delta \subseteq [0, 1]$ и v*

$$P\{\varphi:\ j(\varphi;\ \Delta,\ \lambda) \geqslant 1 \mid \varphi(s) = v\} \leqslant 2\varphi_{\lambda/4}(|\Delta|),$$

где $|\Delta|$ — длина Δ.

Эта лемма выводится непосредственно из леммы 1 работы [2.3] (следует только заметить, что неравенство $j(\varphi;\ \Delta,\ \lambda) > 1$ равносильно неравенству $\omega_\varphi(\Delta) > \lambda$).

Лемма 2.6. *При любых $\lambda > 0$, $\Delta \subseteq [0, 1]$ и v*

$$P(\varphi:\ j(\varphi;\ \Delta,\ \lambda) \geqslant k \mid \varphi(s) = v) \leqslant (2\psi_{\lambda/4}(|\Delta|))^k.$$

Доказательство получается почти дословным повторением доказательства аналогичного утверждения в [2.4], стр. 293, и опирается на лемму 2.5. Встречающийся в [2.4] множитель $\varepsilon/(1-\varepsilon)$ заменен здесь на $2\psi_{\lambda/4}(|\Delta|)$.

Следствие из леммы 2.6. *Выберем $\delta_0 > 0$ и целое число k_0, так, чтобы $1/\delta_0$ было целым и чтобы выполнялись неравенства*

$$2\psi_{\lambda/4}(\delta_0) < 1 \tag{2.18}$$

и

$$(2\psi_{\lambda/4}(\delta_0))^{k_0+1}\delta_0^{-1} < \varepsilon/4. \tag{2.19}$$

Тогда с вероятностью $\geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{4}$ величина $j_\varphi = j(\varphi;\ [0,\ 1],\ \lambda)$ не превосходит

$$S_\varepsilon = k_0/\delta_0. \tag{2.20}$$

В самом деле, разобьем отрезок $[0, 1]$ на интервалы $\Delta_\nu = [(\nu-1)\delta_0, \nu\delta_0]$ при $1 \leqslant \nu < n = \delta_0^{-1}$, $\Delta_n = [(n-1)\delta_0, n\delta_0]$. В силу (2.19) множество

$$E^* = \left\{\varphi: \max_{1 \leqslant \nu \leqslant \delta_0^{-1}} j(\varphi; \Delta_\nu, \lambda) \geqslant k_0 + 1\right\}$$

имеет меру меньшую, чем $\varepsilon/4$. Следовательно, дополнительное множество $\bar{E}^*$ имеет меру большую, чем $1 - \frac{\varepsilon}{4}$. Но, как вытекает из определения величин τ_i,

$$E^* \subseteq \{\varphi : j_\varphi \leqslant k_0/\bar{\delta}_0\},$$

ч. тр. д.

Положим теперь

$$\theta_j = \tau_j(\varphi; [0, 1], \lambda) - \tau_{j-1}(\varphi; [0, 1], \lambda), \quad j = 1, 2, \ldots, j_\varphi.$$

Мы имеем при $\delta > 0$

$$P\left\{\varphi: \min_{1 \leqslant j \leqslant j_\varphi} \theta_j < \delta\right\} \leqslant \sum_{\nu=1}^{S_\varepsilon} P\{\varphi: \min_{1 \leqslant j \leqslant \nu} \theta_j < \delta, j_\varphi = \nu\} + P\{\varphi: j_\varphi > S_\varepsilon\}. \tag{2.21}$$

Второе слагаемое в правой части (2.21) не превосходит $\varepsilon/4$, а первое слагаемое не превосходит

$$\sum_{\nu=1}^{S_\varepsilon} \sum_{j=1}^{\nu} p_j, \tag{2.22}$$

где

$$p_j = P\{\varphi: \theta_j < \delta\}.$$

Оценим величину p_j. Введем обозначения

$$\Delta_l^N = \left[\frac{l-1}{2^N}(1-\delta), \frac{l}{2^N}(1-\delta)\right),$$
$$\tilde{\Delta}_l^N = \left[\frac{l}{2^N}(1-\delta), \frac{l}{2^N}(1-\delta) + \delta\right),$$
$$G_l^N = \{\varphi: \tau_{i-1} \in \Delta_l^N, j(\varphi; \tilde{\Delta}_l^N, \lambda) \geqslant 1\},$$

(l изменяется от 1 до 2^N), $\Delta = [1-\delta, 1]$,

$$G = \{\varphi: \theta_j < \delta, \tau_{j-1} \in \Delta\}.$$

Так как $G \subseteq \{\varphi: j(\varphi; \Delta, \lambda) \geqslant 1$, то

$$P(G) \leqslant 2\psi_{\lambda/4}(\delta). \tag{2.23}$$

Далее

$$P(G_l^N) = P\{\tau_{j-1} \in \Delta_l^N\} \int_{-\infty}^{+\infty} P\{\varphi: j(\varphi; \tilde{\Delta}_l^N, \lambda) \geqslant 1 / \tau_{j-1} \in \Delta_l^N, \varphi(l \cdot 2^{-N}) = v\} \times$$
$$\times dP\{\varphi(l \cdot 2^{-N}) \leqslant v / \tau_{j-1} \in \Delta_l^N\} = P\{\tau_{j-1} \in \Delta_l^N\} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} P\{\varphi: j(\varphi; \tilde{\Delta}_l^N, \lambda) \geqslant 1 / \varphi(l \cdot 2^{-N}) = v\}\, dP\{\varphi(l \cdot 2^{-N}) \leqslant v / \tau_{j-1} \in \Delta_l^N\}.$$

Применяя к подинтегральному выражению в последнем интеграле лемму 2.5, мы получаем

$$P(G_l^N) \leqslant 2\psi_{\lambda/4}(\delta) \cdot P(\tau_{j-1} \in \Delta_l^N)$$

и

$$P\left(\bigcup_{l=1}^{2^N} G_l^N\right) \leqslant 2\psi_{\lambda/4}(\delta). \tag{2.24}$$

Докажем теперь, что если φ_0 непрерывна в нуле и

$$\varphi_0 \in \{\varphi : \theta_j < \delta\},$$

то

$$\varphi_0 \in \left(\liminf \bigcup_{l=1}^{2^N} G_l^N\right) \cup G. \tag{2.25}$$

Действительно, пусть $\tau_{j-1}(\varphi_0; [0, 1], \lambda) = t$ и $\tau_j(\varphi_0; [0, 1], \lambda) = t'$ и $t' - t < \delta$. Если $t \in \Delta$, то $\varphi_0 \in G$. Если $t \overline{\in} \Delta$, то мы выбираем сперва $\varkappa'$ столь малым, что $t' - t + \varkappa' < \delta$. Колебание φ_0 на $(t, t' + \varkappa']$ больше λ и потому можно взять $\varkappa''$ столь малым, чтобы это колебание было больше $\lambda + \varkappa'''$. Возьмем затем $\varkappa'''$ столь малым, что $\varkappa''' < \varkappa'$ и что колебание φ_0 на $(t, t + \varkappa''')$ меньше $\varkappa''/2$. Тогда колебание φ_0 на $[t + \varkappa''', t' + \varkappa']$ будет больше $\lambda + \frac{\varkappa''}{2}$. Выберем N_0 столь большим, чтобы на интервал $\left(t, t + \frac{\varkappa'''}{2}\right)$ попала хотя бы одна точка вида $l \cdot 2^{-N_0}$. Пусть $N \geqslant N_0$ и $\Delta_{l_N}^N$ — интервал, содержащий t. По построению колебание φ_0 на $\widetilde{\Delta}_{l_N}^N$ больше, чем $\lambda + \frac{\varkappa''}{2}$, поэтому

$$\varphi_0 \in G_{l_N}^N, \quad N \geqslant N_0.$$

Включение (2.25) доказано. Из (2.23) — (2.25) и известных свойств меры вытекает неравенство

$$p_j \leqslant \liminf P\left(\bigcup_{l=1}^{2^N} G_l^N\right) + P(G) \leqslant 4\psi_{\lambda/4}(\delta).$$

Теперь соотношения (2.21) и (2.22) дают

$$P\{\varphi : \min_{1 \leqslant j < j_\varphi} \theta_j < \delta\} \leqslant 4S_\varepsilon^2 \psi_{\lambda/4}(\delta) + P\{\varphi : j_\varphi > S_\varepsilon\}. \tag{2.26}$$

Для совокупности

$$\{\varphi : \min_{1 \leqslant j \leqslant j_\varphi} \theta_j \geqslant \delta\}, \tag{2.27}$$

как нетрудно проверить

$$\widetilde{\omega}_\varphi(\delta/2) \leqslant \lambda. \tag{2.28}$$

Определим число $\delta_1(\varepsilon)$ из условия, что при $\delta = 2\delta_1$, $\lambda = 1$ правая часть (2.26) не превосходит $\frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$. Если $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$ уже определены, то $\delta_n(\varepsilon)$ выбирается так, что $\delta_n < \delta_{n-1}$ и при $\delta = 2\delta_n$, $\lambda = 1/n$ правая часть (2.26) не превосходит $\frac{1}{2^n} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$. Для так построенных δ_n

$$P\{\varphi : \widetilde{\omega}_\varphi(\delta_n) \leqslant 1/n\} \geqslant 1 - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$P\{\varphi\colon \widetilde{\omega}_\varphi(\delta_n) \leqslant 1/n \text{ при всех номерах } n\} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.29}$$

За $\omega(\delta, \varepsilon)$ мы можем принять любую монотонно стремящуюся к нулю при $\delta \to 0$ функцию, для которой

$$\omega(\delta_{n+1}, \varepsilon) \geqslant 1/n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Для каждой такой функции

$$P\{\varphi\colon \widetilde{\omega}_\varphi(\delta) \leqslant \omega(\delta, \varepsilon) \text{ при всех } \delta \leqslant \delta_1(\varepsilon)\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теорема 2.2 доказана.

Одно из возможных дополнительных к (2.14) условий, обеспечивающих выполнение (2.16), дается следующей теоремой (ср. [2.4], 290).

Теорема 2.3. *Пусть в дополнение к (2.14) имеют место условия*

1. *существует* $\delta_0 > 0$ *такое, что при* $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_1 + \delta_0$ *для каждого (конечного) интервала* I

$$P(t_1, u_1; t_2, I) \leqslant v_I(u_1),$$

где $v_I(u) \to 0$ *при* $|u| \to \infty$,

2. *существует такая конечная система точек* $t_i \in [0, 1]$, $t_i < t_{i+1}$, $t_0 = 0$, $t_s = 1$ *с расстоянием между соседними точками* $\leqslant \delta_0$, *что*

$$P\{\varphi\colon \max_{0 \leqslant i \leqslant s} |\varphi(t_i)| < M\} > 1 - w(M),$$

где $w(M) \to 0$ *при* $M \to \infty$.

Тогда при любом $\varepsilon > 0$ *найдется постоянная* M_ε, *зависящая только от* ε *и функций* $v_I(u)$, $w(M)$, *для которой*

$$P\{\varphi\colon \sup_{t \in [0, 1]} |\varphi(t)| < M_\varepsilon\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Доказательство теоремы 2.3. Выберем M' так, что

$$u(M') < \varepsilon/4. \tag{2.30}$$

Положим

$$A = \{\varphi\colon \max_{0 \leqslant i \leqslant s} |\varphi(t_i)| < M'\},$$

$$m_i = \sup_{t_{i-1} \leqslant t < t_i} |\varphi(t)|,$$

$$B = \{\varphi\colon \sup_{t \in [0, 1]} |\varphi(t)| > M\},$$

$$B_i = \{\varphi\colon m_1, m_2, \ldots, m_{i-1} \leqslant M, m_i > M\},$$

где M — некоторая постоянная. Имеем

$$P(B) \leqslant \sum_{i=1}^{s} P(B_i \cap A) + P(\bar{A}). \tag{2.31}$$

В силу (2.30)

$$P(\bar{A}) < \varepsilon/4. \tag{2.32}$$

Величина $P(B_i \cap A)$ не превосходит

$$q_i = P\{\varphi : m_i > M,\ |\varphi(t_i)| < M'\}. \tag{2.33}$$

Стандартными приемами для вероятности (2.33) получаем оценку

$$q_i \leqslant \sup_{|u|>M} v_{(-M', M')}(u). \tag{2.34}$$

Определим M_ε из условия, что величина в правой части (2.34) не превосходит $\varepsilon/4s$. Соотношения (2.31) — (2.34) приводят к неравенству $P(B) < \varepsilon/2$, ч. тр. д.

Следствие из теорем 2.2 и 2.3. *Если для семейства* $\mathfrak{N}$ *распределений в* $D[0, 1]$ *выполняются условия теорем 2.2 и 2.3 с одними и теми же функциями* $\psi_\lambda(\delta)$, $v_I(u)$, $w(M)$, *то это семейство компактно.*

Замечание. Если для распределений из $\mathfrak{N}$ выполняется (2.14) с одними и теми же для всех $P \in \mathfrak{N}$ функциями $\psi_\lambda(\delta)$, то каждое предельное распределение P для $\mathfrak{N}$ таково, что совокупность $\varphi \in D[0, 1]$ непрерывных в какой-либо фиксированной точке τ_0, $0 \leqslant \tau_0 \leqslant 1$, имеет P-меру единица. Из сходимости

$$P_n \Rightarrow P,\ P_n \in \mathfrak{N}$$

вытекает, что при любых t_i, $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_s \leqslant 1$

$$P_n^{\varphi(t_2), \ldots, \varphi(t_s)} \Rightarrow P^{\varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_s)}.$$

Действительно, по лемме 2.5 при каждом n

$$P_n(B) \leqslant 2\psi_{\lambda/4}(2\delta),$$

где B — открытое множество:

$$B = \{\varphi : \omega_\varphi(\tau - \delta,\ \tau + \delta) > \lambda\}.$$

По теореме 1.2′

$$P(B) \leqslant \varliminf_n P_n(B) \leqslant 2\psi_{\lambda/4}(2\delta),$$

откуда получается первое из сформулированных выше утверждений. Второе утверждение следует из того, что

$$(\varphi(t_1),\ \varphi(t_2), \ldots,\ \varphi(t_s))$$

есть непрерывное почти всюду по мере P отображение $D[0, 1]$ в R^s (см. теорему 4 дополнения 1 и примечание к теореме 1.8).

§ 2.4. Пример: критерий Колмогорова

Пусть $F_n(t)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке объема n из генеральной совокупности с равномерным на $[0, 1]$ распределением, и

$$\xi_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Известно, что $\xi_n(t)$ есть марковский «процесс». Обозначим через P_n соответствующее ему распределение в $D[0, 1]$, а через P — распределение в $D[0, 1]$ (сосредоточенное на подмножестве C непрерывных

$\varphi \in D[0, 1]$, соответствующее нормальному «процессу» $\xi(t)$ со средним 0 и корреляционной функцией

$$\mathbf{M}\,\xi(t)\cdot\xi(s) = \min(s, t) - st.$$

Теорема 2.4. *. *При* $n \to \infty$

$$P_n \Rightarrow P.$$

Доказательство опирается на следующие леммы.

Лемма 2.7. *При любых* t_i, $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_r \leqslant 1$

$$P_n^{t_1, t_2, \ldots, t_r} \Rightarrow P^{t_1, t_2, \ldots, t_r}.$$

Утверждение леммы есть очевидное следствие многомерной теоремы Лапласа.

Пусть теперь π — преобразование $D[0, 1]$ в себя, определяемое следующим образом:

$$\pi : x(t) \to y(t) = \ln\left(x(t) + \sqrt{x^2(t) + 1}\right)$$

и

$$\eta_n(t) = \pi(\xi_n(t)), \quad \eta(t) = \pi(\xi(t)).$$

Лемма 2.8. *Последовательность* P_n^{π} *компактна.*

Доказательство. Как показывает простой подсчет, при $s < t$

$$\mathbf{M}((\xi_n(t) - x)^2 \mid \xi_n(s) = x) = t - s - \frac{(t-s)^2}{1-s} - \frac{x(t-s)}{\sqrt{n}(1-s)} + \frac{x^2(t-s)^2}{(1-s)^2} + \frac{x(t-s)^2}{\sqrt{n}(1-s)},$$

что при $s, t \leqslant 3/4$ дает

$$\mathbf{M}((\xi_n(t) - x)^2 \mid \xi_n(s) = x) \leqslant 50(1 + x^2)(t - s). \tag{2.35}$$

Вследствие (2.35)

$$\Pr\{|\xi_n(t) - x| > \delta\sqrt{1 + x^2} \mid \xi_n(s) = x\} \leqslant 50\delta^{-2}(t - s),$$

откуда для «процесса» $\eta_n(t)$ получаем $(s < t \leqslant 3/4)$

$$\Pr\{|\eta_n(t) - y| > \delta \mid \eta_n(s) = y\} \leqslant 50c^{-2}(\delta)(t - s), \tag{2.36}$$

где $c(\delta)$ — некоторая функция, вид которой здесь нет надобности уточнять. Положим

$$A_{[t_1, t_2]}(\omega) = \{\varphi: \sup_{|\Delta| \leqslant \delta,\ \Delta \subseteq [t_1, t_2]} \tilde{\omega}_{\varphi}(\Delta) \leqslant \omega(\delta) \text{ при всех } \delta\}^{**}$$

и

$$B_{[t_1, t_2]}(M) = \{\varphi: \sup_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} |\varphi(t)| \leqslant M\}.$$

Из (2.36) и теоремы 2.2 выводим, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется функция $\omega_{\varepsilon}(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, для которой

$$P_n^{\pi}\{A_{[0, 3/4]}(\omega_{\varepsilon})\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.37}$$

---

* См. [2.11].

** $|\Delta|$ означает длину интервала Δ.

Отметим теперь, что для множества E тех $\varphi \in D[0,1]$, для которых $\varphi(0) = 0$ и которые не имеют разрывов по абсолютной величине > 1, при каждом n

$$P_n^{\pi}(E) = 1. \tag{2.38}$$

Для функций $\varphi \in A_{[0,\,3/4]}(\tilde{\omega}_\varepsilon) \cap E$ по свойству (ω.3) (см. дополнение 1)

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 3/4} |\varphi(t)| \leqslant \omega_\varphi[0, 3/4] \leqslant 4(\tilde{\omega}_\varphi[0, 3/4] + 1) \leqslant M_\varepsilon = 4(\omega_\varepsilon(3/4) + 1).$$

Поэтому соотношения (2.37) и (2.38) дают нам

$$P_n^{\pi}(A_{[0,\,3/4]}(\omega_\varepsilon(\delta)) \cap B_{[0,\,3/4]}(M_\varepsilon)) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.39}$$

Замечая, что распределения P_n, а следовательно и распределения P_n^{π}, инвариантны относительно преобразования

$$\varphi(t) \to \varphi_1(t) = \varphi(1 - t),$$

мы устанавливаем, используя (2.39), что

$$P_n^{\pi}(A_{[1/4,\,1]}(\omega_\varepsilon(\delta)) \cap B_{[1/4,\,1]}(M_\varepsilon)) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.40}$$

Полагая

$$\omega(\delta) = \begin{cases} \omega_\varepsilon(\delta) & \text{при } \delta < \frac{1}{2} \\ 2M_\varepsilon & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant \delta \leqslant 1 \end{cases}$$

мы получаем для компакта $K_\varepsilon \subseteq D[0,1]$

$$K_\varepsilon = A_{[0,\,1]}(\omega(\delta)) \cap B_{[0,\,1]}(M_\varepsilon) \supseteq$$

$$\supseteq A_{[0,\,3/4]}(\omega_\varepsilon(\delta)) \cap B_{[0,\,3/4]}(M_\varepsilon) \cap A_{[1/4,\,1]}(\omega_\varepsilon(\delta)) \cap B_{[1/4,\,1]}(M_\varepsilon)$$

неравенство

$$P_n^{\pi}(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon.$$

Лемма 2.8 доказана.

Лемма 2.9. *Последовательность P_n компактна и каждое предельное для нее распределение целиком сосредоточено на подмножестве C^* непрерывных $\varphi \in D[0,1]$.*

Доказательство. Отображение π^{-1} непрерывно относительно d-сходимости функций $\varphi \in D[0,1]$. Применяя теорему 1.10 с $\xi_n = \pi^{-1}$, мы приходим к первому утверждению леммы. Второе утверждение леммы есть очевидное следствие двух обстоятельств. Первое: число $\nu_\lambda(\varphi)$ разрывов функции $\varphi \in D[0,1]$, по абсолютной величине больших λ, есть d-непрерывный функционал; поэтому из $P_{n_k} \Rightarrow P$ вытекает

$$P_{n_k}^{\nu_\lambda} \Rightarrow P^{\nu_\lambda}.$$

Второе: при каждом $\lambda > 0$, начиная с некоторого k,

$$P_{n_k}^{\nu_\lambda}(\{0\}) = 1.$$

Значит при каждом $\lambda > 0$

$$P\{\varphi\colon \nu_\lambda(\varphi) = 0\} = 1$$

и

$$P\{C^*\} = 1.$$

Лемма 2.9 доказана.

Из лемм 2.7, 2.9 и замечания к теореме 2.3 (стр. 208) следует теорема 2.4.

ГЛАВА 3. ПЕРЕХОД ОТ СЕРИИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН К ПРОЦЕССАМ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

§ 3.1. Сходимость к винеровскому распределению

Рассмотрим последовательность серий

$$\xi_{n,1},\ \xi_{n,2},\ \ldots,\ \xi_{n,k_n} \tag{3.1}$$

независимых в каждой серии случайных величин, подчиненных условию «предельной пренебрегаемости»: при каждом $\varepsilon > 0$

$$\lim_n \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \Pr\{|\xi_{n,k}| > \varepsilon\} = 0, \tag{3.2}$$

и условиям

$$\mathbf{M}\,\xi_{n,k} = 0,\ \sigma^2_{n,k} = \mathbf{D}\,\xi_{n,k} > 0,\ \sum_{k=1}^{k_n} \sigma^2_{n,k} = 1. \tag{3.3}$$

Положим

$$\zeta_{n,0} = 0;\quad \zeta_{n,k} = \xi_{n,1} + \xi_{n,2} + \ldots + \xi_{n,k},\qquad 1 \leqslant k \leqslant k_n;$$

$t_{n,k} = \mathbf{D}\zeta_{n,k}$ и построим «случайную ломаную 1» $\xi_n(t)$ с вершинами $(t_{n,k},\ \zeta_{n,k})$. Соответствующее ей распределение в $C[0,1]$ обозначим через P_n. Наконец, через W обозначим «винеровское распределение» в $C[0,1]$, однозначно определяемое следующими условиями:

1. При любых фиксированных $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_s\ (0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_s \leqslant 1)$, заданные над полем вероятностей $(C, \mathfrak{M}_W, W)$ случайные величины

$$x(t_2) - x(t_1),\quad x(t_3) - x(t_2),\ \ldots,\ x(t_s) - x(t_{s-1})$$

взаимно независимы;

2. $x(t_{k+1}) - x(t_k)$ имеет нормальное распределение со средним нуль и дисперсией $t_{k+1} - t_k$;

3. с вероятностью единица $x(0)$ равно 0.

Имеет место

Теорема 3.1. *При выполнении требований* (3.2) *и* (3.3) *для сходимости*

$$P_n \Rightarrow W \tag{3.4}$$

необходимым и достаточным является условие Линдеберга: для каждого $\lambda > 0$

$$\lim_n \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|>\lambda} x^2\, dF_{n,k}(x) = 0, \tag{3.5}$$

где

$$F_{n,k}(x) = \Pr\{\xi_{n,k} < x\}.$$

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим множество, состоящее из всех функций $x(t) \in C[0,1]$ с $x(1) < \alpha$. Очевидно, что A_α есть множество непрерывности распределения W и что

$$W(A_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-z^2/2}\, dz = \Phi(\alpha).$$

Из сходимости (3.4) следует

$$P_n(A_\alpha) = \Pr\{\zeta_{n,k_n} < \alpha\} \to W(A_\alpha) = \Phi(\alpha).$$

Из последнего соотношения и условий (3.2), (3.3) вытекает (3.5) (см. [1.1], стр. 110).

Достаточность. Рассмотрим сначала последовательность серий случайных величин, подчиненную отличным от принятых в теореме 3.1 допущениям. Именно, предположим, что случайные величины $\xi'_{n,k}$ ($1 \leqslant k \leqslant k_n$, n — попрежнему номер серии) независимы и удовлетворяют условиям

$$\mathbf{M}\xi'_{n,k} = 0; \quad |\xi'_{n,k}| \leqslant \lambda_n,\ 1 \leqslant k \leqslant k_n, \quad \lambda_n \downarrow 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Предположим, далее, что каждому n сопоставлено разбиение отрезка $[0,1]$ точками $t'_{n,k}$

$$t'_{n,0} = 0 < t'_{n,1} < \ldots < t'_{n,k_n} = 1,$$

причем эти точки выбраны так, что

$$\mathbf{D}(\xi'_{n,i-1} + \ldots + \xi'_{n,j-1}) \leqslant K(\Delta t'_{n,i} + \ldots + \Delta t'_{n,j}),$$

где K — некоторая постоянная и $\Delta t'_{n,k} = t'_{n,k} - t'_{n,k-1}$. Пусть $\zeta'_{n,0} = 0$, $\zeta'_{n,k} = \sum_{i=1}^{k} \xi'_{n,i}$; $1 \leqslant k \leqslant k_n$; $\xi'_n(t)$ — «случайная ломаная 1» с вершинами $(t'_{n,k}, \zeta'_{n,k})$, P'_n — соответствующее ей распределение в пространстве $C[0,1]$.

Лемма 3.1. *В перечисленных предположениях последовательность* $\{P'_n\}$ *слабо компактна.*

Доказательство леммы опирается на хорошо известные неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин, которые перечислены в лемме 3.2.

Лемма 3.2. *Если* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ *— независимые случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю,* $s_k = \eta_1 + \ldots + \eta_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$; $B = \mathbf{D}s_m$, *то*

$$\Pr\{\max_k |s_k| > z\} < Bz^{-2}.$$

Если, кроме того, $\max_k |\eta_k| \leqslant Y$, *то указанная вероятность не превосходит величины* $2\exp\{-z^2/4B\}$ *при* $zY \leqslant B$ *и величины* $2\exp\{-z/4Y\}$ *при* $zY \geqslant B$ (см. [3.11]).

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ — заданные числа. Из леммы 3.2 прежде всего выводим, что P'_n — мера множества

$$A = \{x: \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| \leqslant \sqrt{2K/\varepsilon}\}$$

не меньше, чем

$$\Pr\{\max_k |\zeta'_{n,k}| \leqslant \sqrt{2K/\varepsilon}\} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon \cdot \mathbf{D}\zeta'_{n,k}}{2K} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Введем теперь следующие обозначения

$$\Delta_\nu^N = ((\nu-1)/N,\ \nu/N),\quad \nu = 1, 2, \ldots, N,$$
$$G_\nu^N = \{x: \sup_{t \in \Delta_\nu^N} |x(t) - x((\nu-1)/N)| \geqslant \delta/4\},$$

i_ν — номер самой левой, а j_ν — самой правой из точек $t_{n,i}$, лежащих на Δ_ν^N; n_1 — номер столь большой, что при $n \geqslant n_1$ $\lambda_n \leqslant \delta/12$. Для P'_n меры множества G_ν^N нетрудно получить при $n \geqslant n_1$ неравенство:

$$P'(G_\nu^N) \leqslant \Pr\left\{\max_{1 \leqslant k \leqslant j_\nu - i_\nu} \left|\sum_{k=1}^{k} \xi_{n,\, t_{\nu}+i}\right| \geqslant \delta/12\right\}. \tag{3.6}$$

Правая часть (3.6) не превосходит, соответственно,

$$2\exp(-\delta^2/4\cdot 12^2 \cdot K \cdot N^{-1}) \text{ при } \delta\lambda_n/12 \leqslant \mathbf{D}(\zeta_{n,\, j_\nu} - \zeta_{n,\, i_\nu}) \leqslant K \cdot N^{-1},$$
$$2\exp(-\delta/4\cdot 12\lambda_n) \text{ при } \delta\lambda_n/12 \geqslant \mathbf{D}(\zeta_{n,\, j_\nu} - \zeta_{n,\, i_\nu}).$$

Потому, при $n \geqslant n_2$

$$P'_n\left(\bigcup_{\nu=1}^{N} G_\nu^N\right) \leqslant 2N\exp(-\delta^2/4\cdot 12^2 K N^{-1}) + 2N\exp(-\delta/4\cdot 12\lambda_n). \tag{3.7}$$

Выберем теперь N_0 столь большим, чтобы первое слагаемое в правой части (3.7) было $\leqslant \varepsilon/4$, а затем $n_2 \geqslant n_1$ столь большим, что $2N_0\exp\cdot(-\delta/4\cdot 12\cdot\lambda_n) \leqslant \varepsilon/4$ при $n \geqslant n_2$. Тогда P'_n-мера множества

$$H = A \cap \bigcap_{\nu=1}^{N_0} G_\nu^{N_0}$$

будет $\geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = 1 - \varepsilon$ при $n \geqslant n_2$. Но, как легко видеть, можно подобрать такую конечную систему X элементов из $C[0,1]$, что сумма их δ-окрестностей покроет множество H. Отсюда следует, что

$$P'_n(S(X, \delta)) \geqslant 1 - \varepsilon,\quad n \geqslant n_2.$$

По теореме 1.12 последовательность $\{P'_n\}$ компактна.

Вернемся к сериям (3.1). Из условий (3.3) и (3.5) нетрудно вывести, что существует монотонно стремящаяся к нулю при $n \to \infty$ последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$, для которой

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{k_n} \Pr\{|\xi_{n,k}| > \lambda_n\} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty, \tag{3.8}$$

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \left| \int_{|x| \leqslant \lambda_n} x\, dF_{n,k}(x) \right| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{3.9}$$

Введем случайные величины $\xi'_{n,k}$, полагая

$$\xi'_{n,k} = \psi_n(\xi_{n,k}) - \mathbf{M}\psi_n(\xi_{n,k}), \tag{3.10}$$

где $\psi_n(\lambda)$ — функция, равная λ при $|\lambda| \leqslant \lambda_n$ и равная нулю в других случаях. Принимая в проведенных перед формулировкой леммы 3.1 построениях $t'_{n,k} = t_{n,k}$, мы видим, что

$$\mathbf{D}\xi'_{n,k} \leqslant \mathbf{D}\xi_{n,k} = \Delta t_{n,k_n} = \Delta t'_{n,k}.$$

По лемме 3.1 совокупность распределений P'_n, соответствующих случайным ломаным $\xi'_n(t)$, построенным по величинам (3.10), компактна. Следовательно, можно выбрать конечное число непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций $x_j(t)$, $j = 1,2,\ldots,s$, таких, что при всех n

$$\Pr\left\{\min_{1\leqslant j\leqslant s}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\xi'_n(t) - x_j(t)| < \frac{\delta}{2}\right\} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.11}$$

Но, как нетрудно подсчитать,

$$\Pr\{\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\xi'_n(t) - \xi_n(t)| \leqslant \beta_n\} \geqslant 1 - \alpha_n. \tag{3.12}$$

На основании (3.8), (3.9), (3.11) и (3.12) заключаем, что при всех достаточно больших n выполняется соотношение (3.11) с заменой в нем $\xi'_n(t)$ на $\xi_n(t)$, $\delta/2$ на δ и $\varepsilon/2$ на ε, так что последовательность $\{P_n\}$ также слабо компактна. Если $P_{n_k} \Rightarrow P^*$, то совместное распределение $P^{t_1,t_2,\ldots,t_r}_{n_k}$ непрерывных функционалов $x(t_1)$, $x(t_2)$, $\ldots$, $x(t_r)$, при любых фиксированных $t_1, t_2, \ldots, t_r$ и $k \to \infty$ слабо сходится к $P^{*\,t_1,t_2,\ldots,t_r}$

Лемма 3.3. *При выполнении условий* (3.3) *и* (3.5) *и любом выборе точек* $t_1, t_2, \ldots, t_r$ *из отрезка* $[0,1]$, *конечномерные распределения*

$$P_n^{t_1,t_2,\ldots,t_r}$$

сходятся к конечномерным распределениям

$$W^{t_1,t_2,\ldots,t_r}$$

Доказательство получается элементарной выкладкой с применением характеристических функций и потому мы его опускаем.

Поскольку всякое распределение в $C[0,1]$ однозначно определяется своими конечномерными распределениями, из леммы 3.3 следует теорема 3.1.

§ 3.2. Сходимость к неограниченно-делимым процессам

Рассмотрим опять последовательность серий (3.1) случайных величин, подчиненных требованию (3.2). Возьмем какую-либо последовательность разбиений отрезка $[0,1]$ точками $t_{n,k}$

$$0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \ldots < t_{n,k_n} = 1,$$

для которой

$$\theta_n = \min_{1\leqslant j\leqslant k_n}(t_{n,j} - t_{n,j-1}) > 0 \tag{3.13}$$

и

$$\Theta_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant k_n} (t_{n,\,j} - t_{n,\,j-1}) \to 0. \tag{3.14}$$

Построим «случайную ломаную 2» $\xi_n(t)$ с вершинами $(t_{n,\,k},\ \zeta_{n,\,k})$ и обозначим через P_n соответствующее ей распределение в $D\,[0,1]$.

Заметим, что всякий стохастический непрерывный на отрезке $[0,1]$ «случайный процесс» с независимыми приращениями будет стохастически равномерно непрерывен на этом отрезке (см. [2.1]) и потому будет удовлетворять условию (2.14). Таким образом, каждому такому «процессу» соответствует распределение в $D\,[0,1]$ (см. стр. 202).

Лемма 3.4. *Для того чтобы последовательность $\{P_n\}$ определенных выше распределений в D $[0,1]$ была компактной и каждое предельное для $\{P_n\}$ распределение соответствовало стохастически непрерывному «процессу» с независимыми приращениями, необходимо и достаточно, чтобы при каждом n*

$$\max_{\Delta,\ |\Delta| \leqslant \delta} \Pr\left\{\left| \sum_{t_{n,\,k} \in \Delta} \xi_{n,\,k} \right| > \lambda \right\} \leqslant C(\lambda, \delta), \tag{3.15}$$

где максимум берется по всем Δ вида $(t_{n,\,j},\ t]$ и

$$C(\lambda, \delta) \to 0 \text{ при } \delta \to 0 \text{ и фиксированном } \lambda > 0, \tag{3.16}$$

$$\sup_{0 \leqslant \delta \leqslant 1} C(\lambda, \delta) \downarrow 0 \text{ при } \lambda \to \infty. \tag{3.17}$$

Доказательство леммы 3.4. Необходимость (3.17). Если последовательность $\{P_n\}$ компактна, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\lambda_\varepsilon > 0$, для которого

$$\Pr\left\{\left| \sum_{t_{n,\,k} \in \Delta} \xi_{n,\,k} \right| > \lambda_\varepsilon \right\} \leqslant P_n\{\varphi : \sup_{t \in [0,1]} |\varphi| > \lambda_\varepsilon / 2\} \leqslant \varepsilon.$$

Необходимость (3.16). Отметим прежде всего, что при фиксированном n и $\delta \to 0$ величина, стоящая в левой части (3.15), стремится к нулю. Если допустить, что (3.16) не выполняется, то найдутся положительные числа λ_0 и ε_0, последовательность целых чисел $\{n_j\}$ и последовательность интервалов $\Delta_j = (t'_j,\ t''_j]$ такие, что

$$n_j \to \infty, \quad |\Delta_j| \to 0 \text{ при } j \to \infty$$

и

$$\Pr\left\{\left| \sum_{t_{n_j,\,k} \in \Delta_j} \xi_{n_j,\,k} \right| > \lambda_0 \right\} \geqslant \varepsilon_0. \tag{3.18}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$t'_j \to \tau, \quad t''_j \to \tau, \quad P_{n_j} \Rightarrow P \text{ при } j \to \infty. \tag{3.19}$$

Выберем теперь δ_0 столь малым, чтобы для замкнутого множества $A = \{\varphi_0 : \omega_\varphi[\tau - \delta_0,\ \tau + \delta_0] \geqslant \lambda_0\} \subset D\,[0,1]$ выполнялось неравенство

$$P(A) < \varepsilon_0 / 2. \tag{3.20}$$

Из замкнутости A, (3.19) и (3.20) вытекает неравенство

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} P_{n_j}(A) \leqslant P(A) < \varepsilon_0/2,$$

которое, очевидно, противоречит (3.18).

Достаточность. Из (3.15) и (3.16) можно вывести точно тем же способом, как при доказательстве теоремы (1.8), существование для каждого $\varepsilon > 0$ функции $\omega_\varepsilon(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, для которой

$$P_n\{\varphi : \tilde{\omega}^{\varphi}(\delta) \leqslant \omega_\varepsilon(\delta)\} > 1 - \varepsilon. \tag{3.21}$$

Мы не будем приводить доказательства. Отметим лишь неравенство

$$P_n\{\varphi : \omega_\varphi(\tau-\delta, \tau+\delta) > \lambda \mid \varphi(\tau-\delta) = v\} \leqslant 2C(\lambda/4;\ 2\delta + \Theta_n), \tag{3.22}$$

аналогичное содержащемуся в лемме 2.5. Здесь Θ_n определено формулой (3.14).

Условие (3.17) аналогично условиям теоремы 1.9 и из него вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная M_ε, для которой

$$P_n\{\varphi : \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\varphi(t)| \leqslant M_\varepsilon\} > 1 - \varepsilon. \tag{3.23}$$

Формулы (3.21) и (3.23) влекут за собой компактность последовательности $\{P_n\}$. Пусть P — какая-либо предельная точка этой последовательности:

$$P_{n_j} \Rightarrow P \quad \text{при } j \to \infty. \tag{3.24}$$

Выберем δ_0 столь малым, чтобы

$$C(\lambda/4;\ \delta_0) < \varepsilon/2, \tag{3.25}$$

и пусть $\delta_1 < \delta_0/3$. Для открытого множества

$$B = \{\varphi : \omega_\varphi(\tau - \delta_0,\ \tau + \delta_0) > \lambda\}$$

имеем, в силу (3.22), (3.24) и (3.25).

$$P\{B\} \leqslant \underline{\lim_{j\to\infty}} P_{n_j}\{B\} < \varepsilon. \tag{3.26}$$

Из (3.26) вытекает, что совокупность функций $\varphi \in D[0,1]$, непрерывных в какой-либо фиксированной точке τ, имеет P-меру единица, и что соответствующие P конечномерные распределения определяют стохастически непрерывный «процесс» $\xi(t)$. Независимость приращений этого процесса на неперекрывающихся интервалах значений t легко выводится из (3.24) и независимости приращений «процессов» $\xi_n(t)$. Для доказательства заметим, что по теореме 4 дополнения 1 отображение π

$$\varphi \to \{\varphi(t_1) - \varphi(t_0), \ldots, \varphi(t_s) - \varphi(t_{s-1})\},$$

где $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_s = 1$ есть непрерывное почти всюду по мере P отображение пространства $D[0,1]$ в R^s. Поэтому, в соответствии с примечанием к теореме 1.8,

$$P_{n_j}^{\pi} \Rightarrow P^{\pi}, \quad j \to \infty,$$

т. е. для почти всех $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \in R^s$

$$P\{\varphi : \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) < \alpha_i, \quad i = 1,2,\ldots,s\} =$$

$$= \lim_{j\to\infty} P_{n_j}\{\varphi : \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) < \alpha_i, \quad i = 1,2,\ldots,s\} =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \prod_{i=1}^{s} P_{n_j}\{\varphi : \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) < \alpha_i\} = \prod_{i=1}^{s} P\{\varphi : \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) < \alpha_i\}.$$

Лемма 3.4 полностью доказана.

Мы выразим теперь условия леммы 3.4 в терминах характеристик, зависящих от отдельных величин $\xi_{n,k}$.

Введем следующие обозначения: $\xi(\lambda) = \xi$ при $|\xi| \leqslant \lambda$, $\xi(\lambda) = 0$ при $|\xi| > \lambda$,

$$\sum_{t_{n,k}\in\Delta} \Pr\{|\xi_{n,k}| > \lambda\} = \Pi_n(\Delta, \lambda),$$

$$\sum_{t_{n,k}\in\Delta} \mathbf{M}\xi_{n,k}(\lambda) = A_n(\Delta, \lambda),$$

$$\sum_{t_{n,k}\in\Delta} \mathbf{D}\xi_{n,k}(\lambda) = B_n(\Delta, \lambda).$$

Лемма 3.5. *Заключение леммы* 3.4. *верно тогда и только тогда, когда*

а) *равномерно по* n

$$\sup_{\Delta} \Pi_n(\Delta, \lambda) \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty, \tag{3.27}$$

б) *существует функция* $C_1(\lambda, \delta)$,

$$C_1(\lambda, \delta) \to 0 \text{ при } \delta \to 0 \tag{3.28}$$

и каждом фиксированном $\lambda > 0$, *для которой*

$$\sup_{\Delta,\, |\Delta| \leqslant \delta} \{\Pi_n(\Delta, \lambda) + |A_n(\Delta, \lambda)| + B_n(\Delta, \lambda)\} \leqslant C_1(\lambda, \delta); \tag{3.29}$$

верхняя грань в (3.29) *при каждом* n *берется по всем интервалам* Δ *вида* $\Delta = (t_{n,i}, t]$.

Доказательство леммы 3.5. Первая часть. Из (3.27) — (3.29) вытекают (3.15) — (3.17). В самом деле, для $\Delta = (t_{n,i}, t]$

$$\Pr\left\{\left|\sum_{t_{n,k}\in\Delta} \xi_{n,k} - A_n(\Delta, \lambda)\right| > x\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \Pr\left\{\left|\sum_{t_{n,k}\in\Delta} \xi_{n,k}(\lambda) - A_n(\Delta, \lambda)\right| > x\right\} + \Pr\left\{\bigcup_{k=1}^{k_n} (\xi_{n,k} \neq \xi_{n,k}(\lambda))\right\} \leqslant \tag{3.30}$$

$$\leqslant x^{-2} B_n(\Delta, \lambda) + \Pi_n(\Delta, \lambda) \leqslant (x^{-2} + 1) \cdot C_1(\lambda, |\Delta|).$$

Беря δ_0 столь малым, что при $\delta \leqslant \delta_0$

$$C_1(\lambda, \delta) \leqslant \min\left[\frac{\lambda}{2}, \varepsilon / \left(1 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-2}\right)\right],$$

и полагая в (3.30) $x = \lambda/2$, мы получаем для всякого интервала Δ указанного выше вида и длины $\leqslant \delta_0$

$$\Pr\Big\{\Big|\sum_{t_{n,k}\in\Delta}\xi_{n,k}\Big|>\lambda\Big\}\leqslant\Pr\Big\{\Big|\sum_{t_{n,k}\in\Delta}\xi_{n,k}-A_n(\Delta,\lambda)\Big|>\frac{\lambda}{2}\Big\}\leqslant\varepsilon,$$

что равносильно (3.16). Далее, выберем λ_0 и затем x_0 так, что

$$\sup_{\Delta}\Pi_n(\Delta,\lambda_0)<\frac{\varepsilon}{2},\quad x_0\geqslant 2\sup_{\delta}C_1(\lambda_0,\delta)$$

и

$$(x_0/2)^{-2}\sup_{\delta}C_1(\lambda_0,\delta)<\varepsilon/2.$$

Полагая в (3.30) $x=x_0/2$, находим, что

$$\Pr\Big\{\Big|\sum_{t_{n,k}\in\Delta}\xi_{n,k}\Big|>x_0\Big\}\leqslant\Pr\Big\{\Big|\sum_{t_{n,k}\in\Delta}\xi_{n,k}-A_n(\Delta,\lambda_0)\Big|>x_0/2\Big\}\leqslant$$
$$\leqslant(x_0/2)^{-2}\sup_{\delta}C_1(\lambda_0,\delta)+\sup_{\Delta}\Pi_n(\Delta,\lambda_0)<\varepsilon,$$

что равносильно (3.17).

Вторая часть. Из (3.15) — (3.17) вытекают (3.27) — (3.29).

Лемма 3.6. *Для компактности последовательности $\{P_n\}$ необходимо, чтобы равномерно по n*

$$\sum_{k=1}^{k_n}P\{|\xi_{n,k}|>\lambda\}\to 0\qquad \textit{при } \lambda\to\infty.$$

Утверждение леммы — очевидное следствие теоремы 1 § 25 книги [1.1].

Лемма 3.6 показывает, что в условиях леммы 3.4 справедливо (3.27). Соотношение (3.28) мы докажем от противного. Если (3.28) неверно, то существуют положительные числа λ_0 и ε_0, последовательность $n_j\uparrow\infty$ целых чисел, последовательность интервалов Δ_j с $|\Delta_j|\to 0$, для которых

$$\Pi_{n_j}(\Delta_j,\lambda_0)+|A_{n_j}(\Delta_j,\lambda_0)|+B_{n_j}(\Delta_j,\lambda_0)\geqslant\varepsilon_0. \tag{3.31}$$

В то же время, в условиях леммы 3.4 при каждом фиксированном $\lambda>0$

$$\Pr\Big\{\Big|\sum_{t_{n_j,k}\in\Delta_j}\xi_{n_j,k}\Big|>\lambda\Big\}\to 0\quad\text{при } j\to\infty. \tag{3.32}$$

Вследствие одной известной теоремы об условиях применимости закона больших чисел (см. [1.1], примечание 3 в § 27), (3.31) противоречит (3.32). Лемма 3.5 полностью доказана.

Как следствие леммы 3.5 получается

Теорема 3.2. *В предположении предельной пренебрегаемости величин $\xi_{n,k}$* (см. (3.2.)) *для сходимости*

$$P_n\Rightarrow P, \tag{3.33}$$

где P — распределение в D [0,1], соответствующее стохастически непрерывному «процессу» с независимыми приращениями, необходимо и достаточно, чтобы

а) *выполнялись условия леммы* 3.5

б) *при любых* $0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_s\leqslant 1$

$$P_n^{t_1,t_2,\ldots,t_s}\Rightarrow P^{t_1,t_2,\ldots,t_s}$$

Замечание. Одного условия б) для сходимости (3.33) недостаточно, как показывает

Пример. Пусть $f_n(t) = t^n(1-t^n)$. Величины n-ой серии определим следующим образом:

$$\xi_{n,k} = f_n\left(\frac{k}{n^2}\right) - f_n\left(\frac{k-1}{n^2}\right) \pm \frac{1}{n^3} \quad \text{с вер. } 1/2,\ k = 1,2,\ldots,n^2. \tag{3.34}$$

Построим «случайную ломаную 2» $\xi_n(t)$ с вершинами

$$\left(\xi_{n,k},\ \frac{k}{n^2}\right),\quad k = 0,1,2,\ldots,n^2.$$

Условие б) теоремы 3.2 выполняется, если положить $P(A) = 1$, если $\varphi(t) \equiv 0 \in A$, и $= 0$ в др. случаях. Тем не менее сходимость (3.33) не имеет места, так как, например,

$$\lim_n P_n\{\varphi:\ \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \varphi > 1/8\} = 1 \neq P\{\varphi:\ \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \varphi > 1/8\} = 0.$$

В частном случае, когда величины внутри каждой серии одинаково распределены, условия сходимости (3.33) принимают весьма простой вид (они указаны в [3.12]), а именно:

Если величины $\xi_{n,k}$ предельно пренебрегаемы и внутри каждой серии одинаково распределены, и если $t_{n,k} = k/k_n$, то для сходимости (3.33) *необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$ распределение*

$$F_{n,k_n}(x) = \Pr\{\zeta_{n,k_n} < x\}$$

сходилось к (неограниченно-делимому) предельному распределению $G(x)$.

Необходимость высказанного условия вытекает из того, что $\varphi(1)$ есть почти всюду непрерывный по мере P функционал, P-распределение которого неограниченно-делимо.

Достаточность. Для сходимости

$$F_{n,k_n} \Rightarrow G,$$

где G — неограниченно-делимое распределение, определяемое постоянной σ^2 и функциями $\gamma(\tau)$, $M(u)$, $N(u)$ (см. [1.1] § 18, формула (8)), необходимо и достаточно (см. там же, § 25), чтобы при $n \to \infty$

$$k_n \Pr\{\xi_{n,k} < u\} \to M(u),\quad u < 0, \tag{3.35а}$$

$$k_n \Pr\{\xi_{n,k} > u\} \to -N(u),\quad u > 0, \tag{3.35б}$$

$$k_n \int\limits_{|x|\leqslant\tau} x\, dF_{n,k}(x) \to \gamma(\tau), \tag{3.35в}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, k_n \int\limits_{|x|\leqslant\varepsilon} x^2\, dF_{n,k} = \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, k_n \int\limits_{|x|\leqslant\varepsilon} x^2\, dF_{n,k} = \sigma^2. \tag{3.35г}$$

Из (3.35 а, б) нетрудно вывести, во первых, что выполняется условие а) леммы 3.5 и, во-вторых, что существует функция $C(\lambda)$, для которой

$$k_n\{\Pr\{|\xi_{n,k}| > \lambda\} + |\mathbf{M}\xi_{n,k}(\lambda)| + \mathbf{D}\xi_{n,k}(\lambda)\} \leqslant C(\lambda). \tag{3.36}$$

Из (3.36) мы видим, что и условие б) леммы 3.5 выполняется с $C_1(\lambda, \delta) = \delta \cdot C(\lambda)$.

Наконец, простой подсчет показывает, что из (3.35 а — г) вытекает сходимость конечномерных распределений

$$P_n^{t_1, t_2, \ldots, t_n}$$

к конечномерным распределениям однородного «процесса» $\xi(t)$ с независимыми приращениями, определяемого характеристической функцией

$$\mathbf{M} \exp iv(\xi(t+h) - \xi(t)) =$$

$$= \exp h\left\{i\gamma(\tau)v - \frac{\sigma^2 v^2}{2} + \int_{-\infty}^{-\tau}(e^{iuv} - 1)\,dM(u) + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau}^{\infty}(e^{iuv} - 1)\,dN(u) + \int_{-\tau}^{0}(e^{iuv} - 1 - iuv)\,dM(u) + \int_{0}^{\tau}(e^{iuv} - 1 - iuv)\,dN(u)\right\},$$

и «начальным условием»

$$\Pr\{\xi(0) = 0\} = 1.$$

Мы можем применить теорему 3.2, что и доказывает вышеприведенное утверждение.

ГЛАВА 4. ОДНА ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ

Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

независимые случайные величины с конечными абсолютными третьими моментами c_k, математическими ожиданиями, равными нулю, и суммой дисперсий, равной единице. Введем следующие обозначения: $L = \sum_{k=1}^{n} c_k$; $\zeta_0 = 0$, $\zeta_k = \sum_{j=1}^{k} \xi_j$, $t_k = D\zeta_k$; $\xi(t)$ — «случайная ломаная 1» с вершинами (t_k, ζ_k); P — распределение в $C[0,1]$, порождаемой этой ломаной; W — винеровское распределение в $C[0,1]$; $H = H(a_1(t), a_2(t))$ — множество тех $x \in C[0,1]$, для которых $a_1(t) \leqslant x(t) \leqslant a_2(t)$ при всех t из отрезка $[0,1]$; функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$ предполагаются удовлетворяющими неравенствам

$$a_1(0) < 0 < a_2(0),\ a_1(t) < a_2(t),\ 0 < t \leqslant 1.$$

и условию Липшица: $|a_i(t'') - a_i(t')| \leqslant K\,|t'' - t'|$.

Имеет место

Теорема 4.1

$$|P(H) - W(H)| \leqslant \varepsilon(L) \cdot L^{1/4} \cdot \log^2 L,$$

где $\varepsilon(L) \to 0$ *при* $L \to 0$.

Доказательство. Будем считать, не оговаривая этого каждый раз, L столь малым, что $1/L > e^2$, $mL^{2/3} \leqslant 0{,}1$; где

$$m = L^{-1/2}(\log(1/L))^{6/4}.$$

Как вытекает из неравенств между моментами

$$D\xi_k = M\xi_k^2 \leqslant c_k^{2/3} \leqslant L^{2/3}. \qquad (4.1)$$

Каждый интервал

$$[(j-1)m_1^{-1},\ jm_1^{-1}),\ j=1,2,\ldots,m_1=[m],$$

содержит, следовательно, не менее девяти точек t_k. Пусть $\theta_j \leqslant jm_1^{-1}$ — ближайшая к jm_1^{-1} слева точка t_k, δ_j — интервал $[\theta_{j-1}, \theta_j)$, $|\delta_j|$ — его длина. В силу (4.1) и выбора числа m

$$0{,}9m_1^{-1} \leqslant |\delta_j| \leqslant 1{,}1m_1^{-1},\ j=1,2,\ldots,m_1. \tag{4.2}$$

Определим теперь отображение π пространства $C[0,1]$ в себя, ставя в соответствие каждой непрерывной функции $x(t)$ функцию, значения которой в точках θ_j совпадают со значениями $x(t)$ и которая в промежутках между соседними точками θ_j изменяется линейно. Пусть $\rho_j(x,y) = \max\limits_{t\in\delta_j} |x(t)-y(t)|$, $\rho = \max\limits_j \rho_j$, $\lambda = m_1^{-1/2}\log(1/L)$, $\Lambda(\Lambda_j)$ — множество тех $x \in C[0,1]$, для которых $\rho(\pi(x),x) > 2\lambda$ (соотв. $\rho_j(\pi(x),x) > 2\lambda$).

Лемма 4.1. *При* $L \to 0$

$$P(\Lambda) = O\left(L^{1/4}(\log(1/L))^{15/8}\right),\ W(\Lambda) = O(L). \tag{4.3}$$

Доказательство леммы. Величина $P(\Lambda_j)$ равна, очевидно, вероятности того, что «случайная ломаная 1» $\Xi(t)$, последовательные вершины которой лежат в точках $(\theta_j, \xi(\theta_j))$, удовлетворяет неравенству

$$\max_{\theta_{j-1}\leqslant t<\theta_j} |\xi(t)-\Xi(t)| > 2\lambda.$$

Но, как легко видеть, величина, стоящая в левой части последнего неравенства, не превосходит

$$2Z_j = 2\max_{\theta_{j-1}<t_k\leqslant\theta_j} \left|\sum_{\theta_{j-1}<t_i\leqslant t_k} \xi_i\right|.$$

Для оценки вероятности $\Pr\{Z_j > \lambda\}$ мы применим следующее хорошо известное неравенство: если $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_N$ — независимые случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю и конечными дисперсиями, $\psi_i = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_i$, то

$$\Pr\{\max_{1\leqslant i\leqslant N} |\psi_i| > z\} \leqslant 2\Pr\{|\psi_N| > z - \sqrt{2\mathbf{D}\psi_N}\},$$

(см. [4.1]). В разбираемом случае это неравенство превращается в следующее:

$$\Pr\{Z_j > \lambda\} \leqslant 2\Pr\left\{|\xi(\theta_j)-\xi(\theta_{j-1})| > \lambda - \sqrt{2\mathbf{D}(\xi(\theta_j)-\xi(\theta_{j-1}))}\right\}.$$

Принимая во внимание, что

$$\mathbf{D}(\xi(\theta_j)-\xi(\theta_{j-1})) = |\delta_j| \quad \text{и} \quad \lambda > 2\sqrt{2|\delta_j|}$$

и применяя теорему Ляпунова (в формулировке Эссена, см. [4.2]), получаем

$$\Pr\{Z_j > \lambda\} \leqslant 4\Phi(-\lambda/2\sqrt{|\delta_i|}) + 4\cdot 7{,}5\cdot L_j,$$

где

$$L_j = |\delta_j|^{-3/2} \sum_{\theta_{j-1}<t_i\leqslant\theta_j} c_i.$$

Из включения $\Lambda \subseteq \bigcup_j \Lambda_j$ вытекает

$$P(\Lambda) \leqslant \sum_j P(\Lambda_j) \leqslant \sum_j \Pr\{Z_j > \lambda\} \leqslant 4 \sum_j \Phi(-\lambda / 2\sqrt{|\delta_j|}) + 4 \cdot 7{,}5 \cdot \sum_j L_j. \quad (4.4)$$

После простого подсчета (4.4) приводит к первому из соотношений (4.3).

Обозначим теперь через $\eta(t)$ винеровскую кривую и через $H(t)$ «случайную ломаную 1», последовательные вершины которой лежат в точках $(\theta_j, \eta(\theta_j))$. Величина $W(\Lambda)$ равна вероятности события

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |H(t) - \eta(t)| > 2\lambda.$$

Рассуждениями, сходными с приведенными выше, нетрудно получить оценку

$$W(\Lambda) \leqslant 4 \sum_j \Phi(-\lambda / \sqrt{|\delta_j|}) = O(L).$$

Лемма доказана.

Из лемм 4.1 и 1.2 следует, что расстояние между распределениями P и P^π случайных ломаных $\xi(t)$ и $\Xi(t)$ удовлетворяет соотношению

$$L(P^\pi, P) = O(L^{1/4} (\log(1/L))^{15/8}), \quad (4.5)$$

а расстояние между распределениями W и W^π винеровской кривой $\eta(t)$ и случайной ломаной $H(t)$ — соотношению

$$L(W^\pi, W) = O(L^{1/4} (\log(1/L))^{9/8}). \quad (4.6)$$

Для того, чтобы сравнить распределения случайных ломаных $\Xi(t)$ и $H(t)$, мы построим преобразование, которое переводит случайную ломаную $H(t)$ в случайную ломаную $\Xi'(t)$, порождающую в пространстве непрерывных функций точно такое же распределение, как и $\Xi(t)$.

Отметим, что случайные величины $\xi(\theta_j) - \xi(\theta_{j-1})$ имеют функции распределения $F_j(z)$, близкие, соответственно, к нормальным функциям распределения $\Phi(z/\sqrt{|\delta_j|})$. Определенные над полем вероятностей $(C[0,1], \mathfrak{M}_W, W)$ случайные величины $\eta_{ij} = x(\theta_j) - x(\theta_{j-1})$, $x \in C[0,1]$ взаимно независимы и функция распределения η_{ij} есть $\Phi(z/\sqrt{|\delta_j|})$. Поэтому случайные величины

$$\eta'_{ij} = F_j^{-1}(\Phi(\eta_{ij}/\sqrt{|\delta_j|})). \quad (4.7)$$

взаимно независимы * и функция распределения η'_{ij} есть $F_j(z)$. Таким образом, случайные величины

$$\zeta'_0 = 0, \ \zeta'_j = \sum_{k=1}^{j} \eta'_k, \ j = 1,2,\ldots,m_1$$

имеют такое же совместное распределение, как и величины

$$\xi(0), \ \xi(\theta_j) - \xi(\theta_{j-1}), \ j = 1,2,\ldots,m_1.$$

---

* Здесь F_j^{-1} — функция, обратная к F_j.

Теперь очевидно, что случайная ломаная $\Xi'(t)$, последовательные вершины которой лежат в точках (θ_j, ξ_j'), является искомой. Мы имеем, следовательно, равенство

$$P^{\pi} = (W^{\pi})^{\gamma}, \tag{4.8}$$

где γ — отображение, с помощью которого $\Xi'(t)$ получается из $x(t)$. Полагая $\varkappa_k = \eta_k' - \eta_k$, находим, что

$$W^{\pi}\{x: \rho(\gamma(x), x) > \lambda\} \leqslant W\left\{x: \max_{0<j<m_1} \left| \sum_{k=1}^{j} \varkappa_k \right| > \lambda\right\} \leqslant \lambda^{-1} \sum_{j=1}^{m_1} \mathbf{M} \mid \varkappa_j \mid. \tag{4.9}$$

Оценим теперь $\mathbf{M} \mid \varkappa_j \mid$:

$$\mathbf{M} \mid \varkappa_j \mid = \mathbf{M} \mid \eta_j' - \eta_j \mid = \int_0^1 \mid F_j^{-1}(y) - \Phi_j^{-1}(y) \mid dy.$$

Нетрудно видеть, что последний интеграл равен площади, заключенной между кривыми $F_j^{-1}(y)$ и $\Phi_j^{-1}(y)\,(0 < y < 1)$, т. е. равен площади, заключенной между кривыми $F_j(x)$ и $\Phi_j(x)\,(-\infty < x < \infty)$, т. е. равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mid F_j(x) - \Phi_j(x) \mid dx.$$

Лемма 4.2. *Пусть* $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ — *независимые случайные величины со средними* 0 *и дисперсиями* σ_j^2, $\overline{F}(x)$ — *функция распределения случайной величины*

$$\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n}{s_n},$$

где

$$s_n^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2.$$

Пусть при $n \geqslant n_0$

$$\Delta_n = \max_x \mid \overline{F}(x) - \Phi(x) \mid \leqslant 1/2.$$

Тогда при $n \geqslant n_0$ *и всех* x

$$\mid \overline{F}(x) - \Phi(x) \mid \leqslant \min\left\{\Delta_n, \left(C\Delta_n \log \frac{1}{\Delta_n}\right)(1 + x^2)^{-1}\right\},$$

где C — *абсолютная постоянная.*

Доказательство см. в работе [4.2], стр. 70.

Применим лемму 4.2 к величине

$$(\xi(\theta_j) - \xi(\theta_{j-1})) \cdot \mid \delta_j \mid^{-1/2} = \left(\sum_{\theta_{j-1} < t_i \leqslant \theta_j} \xi_i\right) \cdot \mid \delta_j \mid^{-1/2},$$

или, что то же самое, к величине

$$\eta_j' \cdot \mid \delta_j \mid^{-1/2},$$

поскольку обе они имеют одну и ту же функцию распределения $F_j(x\sqrt{\mid \delta_j \mid})$. По теореме Ляпунова в формулировке Эссена

$$\max_x \mid F_j(x\sqrt{\mid \delta_j \mid}) - \Phi(x) \mid \leqslant 7{,}5\, L_j,$$

причем, как легко проверить

$$7{,}5 \cdot \max_{0<j\leqslant m_1} L_j \leqslant 1/2.$$

Используя лемму 4.2, после простых выкладок приходим к неравенствам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F_j(x\sqrt{|\delta_j|}) - \Phi(x)|\, dx \leqslant C'\Delta_j \sqrt{\log \frac{1}{\Delta_j}}, \tag{4.10}$$

где C' — абсолютная постоянная, $j = 1,2,\ldots,m_1$,

$$\Delta_j = 7{,}5\, L_j.$$

Из (4.10) следует, что

$$\sum_j \mathbf{M}|\varkappa_j| \leqslant \sqrt{1{,}1}\cdot C' \cdot m_1^{-1/2} \sum_j \Delta_j \sqrt{\log \frac{1}{\Delta_j}}. \tag{4.11}$$

Функция

$$\sum_1^N p_j \sqrt{\log \frac{1}{p_j}}$$

при фиксированной сумме

$$\sum_1^N p_j = p < 1$$

достигает наибольшего значения $p(\log(N/p))^{1/2}$ при

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_N = p/N.$$

Это замечание позволяет утверждать, что сумма в правой части (4.11) не превосходит величины

$$\Delta(\log(m_1/\Delta))^{1/2}, \tag{4.12}$$

где

$$\Delta = \sum_j \Delta_j = 7{,}5 \sum_j L_j \leqslant 7{,}5 \cdot (0{,}9)^{-3/2} m_1^{3/2} L. \tag{4.13}$$

Легко показать, что выражение (4.12) не уменьшится, если в нем Δ заменить оценкой Δ из (4.13). Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\sum_j \mathbf{M}|\varkappa_j| = O(L^{1/2}(\log(1/L))^{3/4})$$

и от него к соотношению

$$W^{\pi}\{x : \rho(\gamma(x), x) > \lambda\} = O(L^{1/4}(\log(1/L))^{15/8}). \tag{4.14}$$

Из (4.14), (4.8) и леммы 1.2 следует, что

$$L(P^{\pi}, W^{\pi}) = O(L^{1/4}(\log(1/L)^{15/8}),$$

что вместе с (4.5) и (4.6) дает неравенство

$$L(P, W) \leqslant \varepsilon_1(L) \cdot L^{1/4}(\log(1/L))^2. \tag{4.15}$$

Перейдем к другой части доказательства. Мы установим сейчас, что ри изменении гладких функций $a_i(t)$ на ε вероятность

$$W(H(a_1(t), a_2(t)))$$

зменяется на величину порядка ε. Рассмотрим предварительно область точек плоскости (t, x), имеющую вид

$$G = \{(t, x): 0 \leqslant t \leqslant 1, -l + \varepsilon + kt < x < \varepsilon + kt\},\ k > 0,\ l > 0,\ \varepsilon > 0.$$

Вероятность $\gamma^*(T)$* того, что винеровская кривая $\eta(t)$ за время $[0, T]$ $T \leqslant 1$) ни разу не выйдет из G, может быть сосчитана стандартными етодами и равна:

$$\gamma^*(T) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(\exp\left(-\frac{T}{2}(m^2\pi^2 l^{-2} + k^2)\right)\right) \cdot \sin(m\pi\varepsilon l^{-1}), \tag{4.16}$$

де

$$A_m = 2m\pi\,[1 - (-1)^m e^{kl}]\, e^{-k\varepsilon} \cdot (l^2k^2 + m^2\pi^2)^{-1}. \tag{4.17}$$

Плотность вероятности выхода за границы области G в момент τ равна

$$-\frac{\partial\gamma^*}{\partial T}(\tau).$$

Элементарный расчет показывает, что при $\tau \geqslant 1/2$ и всех $\varepsilon \geqslant 0$

$$-\frac{\partial\gamma^*}{\partial T}(\tau) \leqslant C(k, l),\ k > 0,\ l > 0, \tag{4.18}$$

де $C(k, l)$ — ограниченная в каждой ограниченной области значений воих аргументов функция, и что при всех τ, $0 < \tau \leqslant 1$

$$\gamma^*(\tau) \leqslant \frac{4\varepsilon \cdot e^{kl}}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\tau\pi^2 x^2}{2l^2}\right) \cdot dx \leqslant 4\varepsilon e^{kl} \sqrt{\frac{2}{\pi\tau}}. \tag{4.19}$$

Введем теперь следующие обозначения:

1) $G(\tau_1, \tau_2; k, O_1, O_2)$ — есть совокупность точек, лежащих в (замкнутом) параллелограмме, ограниченном прямыми $t = \tau_1$, $t = \tau_2$ $(\tau_1 < \tau_2)$ и прямыми угловым коэффициентом k, проходящими через точки O_1 и O_2;

2) $$B_\tau = \{(t, x): \tau \leqslant t \leqslant 1,\ a_1(t) \leqslant x \leqslant a_2(t)\},$$

$$B'_\tau = \{(t, x): \tau \leqslant t \leqslant 1,\ a_1(t) - \varepsilon \leqslant x \leqslant a_2(t) + \varepsilon\};$$

3) Если D — область типа, указанного в п. 1) или в п. 2), то $D^+_{t_1, t_2}(D^-_{t_1, t_2})$ есть событие, заключающееся в том, что кривая $\eta(t)$ впервые ыходит из области D в промежутке (t_1, t_2) и притом через верхнюю соотв. нижнюю) границу;

4) $D_{t_1, t_2} = D^+_{t_1, t_2} \cup D^-_{t_1, t_2}$.

Пусть $0 < \varepsilon < 1$, $a_1(t)$ и $a_2(t)$ — функции, введенные в начале этой лавы,

$$M = \max_{t \in [0, 1]} |a_1(t)| + \max_{t \in [0, 1]} |a_2(t)| + 4K + 1,$$

* Иногда мы будем использовать более подробную запись

$$\gamma^*(T) = \gamma^*(T; \varepsilon, k, l).$$

$\tau^+(\tau^-)$ — момент первого выхода из области B_0, если этот выход совер шается через верхнюю (соотв. нижнюю) границу области B_0.
Мы имеем

$$\Pr\{(B_0)^+_{0,1} \cap \overline{(B_0')_{0,1}}\} = \int_0^1 \Pr\{\overline{(B_\tau')_{\tau,1}} \mid \tau^+ = \tau\}\, d\Pr\{\tau^+ < \tau\} =$$

$$= \int_0^1 \Pr\{\overline{(B_\tau')_{\tau,1}} \mid \eta(\tau) = a_2(\tau)\}\, d\Pr\{\tau^+ < \tau\} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \Pr\{G_{\tau,1}(\tau, 1; 2K; (\tau, a_2(\tau) + \varepsilon), (\tau, -M)) \mid \eta(\tau) = a_2(\tau)\}\, d\Pr\{\tau^+ < \tau\} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \gamma^*(1 - \tau; \varepsilon, 2K, M + \varepsilon)\, d\Pr\{\tau^+ < \tau\}.$$

Разобьем последний интеграл на два — один, взятый по промежутку $[0, 1/2)$, и другой, взятый по промежутку $[1/2, 1]$. Вследствие (4.19) пер вый интеграл не превосходит

$$\varepsilon \cdot 4(\exp(2K(M + \varepsilon))) \cdot \sqrt{4/\pi}. \qquad (4.20$$

Оценка второго интеграла получается из следующих соображений Во-первых, при $\tau > 1/2$, $\Delta > 0$

$$\Pr\{\tau < \tau^+ < \tau + \Delta\} \leqslant \Pr\{G_{\tau,\tau+\Delta}(0,1; -2K; (\tau, a_2(\tau)), (\tau, -M))\} =$$

$$= \Pr\{G_{\tau,\tau+\Delta}(0,1; 2K, (\tau, -a_2(\tau)), (\tau, M))\} \leqslant$$

$$\leqslant \Delta \cdot \sup_{\tau' \in [\tau, \tau+\Delta]} \left(-\frac{\partial}{\partial \tau'} \gamma^*(\tau'; M - 2K\tau, 2K, M + a_2(\tau))\right) \leqslant$$

$$\leqslant \Delta \cdot \sup_{k=2K,\, 4K \leqslant l \leqslant 2M} C(k, l), \qquad (4.21$$

где $C(k, l)$ имеет тот же смысл, что и в (4.18). Во-вторых, по (4.19)

$$\gamma^*(1 - \tau; \varepsilon, 2K, M + \varepsilon) \leqslant \varepsilon \cdot 4(\exp 2K(M + \varepsilon))\sqrt{2/\pi(1 - \tau)}. \qquad (4.22$$

Обозначим для краткости множители при Δ и $\varepsilon/\sqrt{1-\tau}$ в правых частях неравенств (4.21) и (4.22) через C' и C'' соответственно. Мы видим, что второй из упоминавшихся выше интегралов не превосходит

$$\varepsilon \cdot C' \cdot C'' \int_{1/2}^1 d\tau/\sqrt{1 - \tau} = C''' \cdot \varepsilon.$$

Итак

$$\Pr\{(B_0)^+_{0,1} \cap \overline{(B_0')_{0,1}}\} \leqslant C^{\mathrm{IV}} \cdot \varepsilon.$$

Аналогичное неравенство верно и для вероятности события

$$(B_0)^+_{0,1} \cap \overline{(B_0')_{0,1}}.$$

Поэтому

$$\Pr\{(B_0)_{0,1} \cap \overline{(B_0')_{0,1}}\} \leqslant C^{\mathrm{IV}} \cdot \varepsilon.$$

Тем самым доказана

Лемма 4.3. *Вероятность* $W(H(a_1(t)-\varepsilon, a_2(t)+\varepsilon))$ *превосходит вероятность* $W(H(a_1(t), a_2(t)))$ *на величину порядка* ε.

Из (4.15), определения расстояния L и леммы 4.3 почти очевидным образом выводится утверждение теоремы 4.1.

Дополнение 1. Функции с разрывами первого рода

Ниже приводятся без доказательств основные сведения о пространстве D [0,1]. Доказательства сообщаемых результатов можно найти в [3.14].

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{F}$ определенных на отрезке [0,1] действительных функций $f(t)$, для которых

(f. 1) в каждой точке $t \in [0,1)$ существует предел справа $f^+(t)$,

(f. 2) в каждой точке $t \in (0,1]$ существует предел слева $f^-(t)$,

(f. 3) в каждой точке $t \in (0,1)$ $f(t) = f^+(t)$ или $f(t) = f^-(t)$ (может быть по-разному в различных точках),

(f.4) значения в точках 0 и 1 произвольны.

Лемма 1. *Каждая функция* $f \in \mathfrak{F}$ *ограничена.*

Лемма 2. *Каждое из соотношений*

$$f(t) \neq f^+(t), f(t) \neq f^-(x)$$

может выполняться для не более чем счетного множества значений t.

Функции f_1 и $f_2 \in \mathfrak{F}$ назовем эквивалентными, если

$$f_1^+(t) = f_2^+(t), f_1^-(t) = f_2^-(t), f_1(0) = f_2(0), f_1(1) = f_2(1).$$

Тем самым $\mathfrak{F}$ разбивается на классы φ эквивалентных между собой функций. Во многих вопросах, говоря о функциях с разрывами первого рода, имеют в виду не самые эти функции, а классы φ. Каждый такой класс однозначно описывается графиком Γ_φ. График определяется как объединение множеств*:

$$\Gamma_\varphi^+ = \{M : t(M) \in (0,1), x(M) = f^+(t(M))\},$$
$$\Gamma_\varphi^- = \{M : t(M) \in (0,1), x(M) = f^-(t(M))\}$$

и множества из двух точек $M(0, f(0))$, $M(1, f(1))$, где f — какой-либо представитель класса φ.

Мы закрепим теперь название «функции с разрывами первого рода» (ф. р. п. р.) за классами φ.

Лемма 3. *График* Γ_φ *ф. р. п. р.* φ *есть замкнутое и ограниченное множество на плоскости.*

Точка $t \in (0,1)$ называется точкой разрыва или точкой непрерывности ф. р. п. р. φ, смотря по тому, будет ли она точкой разрыва и точкой непрерывности для $f \in \varphi$. Величиной разрыва называется или $f^+(0) - f(0)$, или $f(1) - f^-(1)$, или $f^+(t) - f^-(t)$, в зависимости от того, равно t нулю, единице или лежит в интервале (0,1). Колебание $\omega_\varphi(A)$ ф. р. п. р. φ на множестве A определяется как верхняя грань модуля разности ординат

* В настоящем дополнении через $M(t, x)$ будет обозначаться точка плоскости с координатами $t = t(M)$ и $x = x(M)$.

тех точек $M, M' \in \Gamma_\varphi$, абсциссы которых лежат в A. Наряду с модулем непрерывности

$$\omega_\varphi(\delta) = \sup_{\{\Delta : |\Delta| \leqslant \delta\}} \omega_\varphi(\Delta)$$

рассматривается некоторый его аналог

$$\widetilde{\omega}_\varphi(\delta) \sup_{\{\Delta : |\Delta| \leqslant \delta\}} \sup_{\tau \in \Delta} \min\{\omega_\varphi[\tau_1, \tau), \omega_\varphi(\tau, \tau_2]\}$$

(верхняя грань в обеих формулах берется по всем отрезкам $\Delta = [\tau_1, \tau_2]$ длины $\leqslant \delta$, $\omega_\varphi[\tau_1, \tau_1]$ определяется как $\lim_{\tau \downarrow 0} \omega_\varphi[\tau_1, \tau)$).

В качестве основных свойств этих функций можно выделить следующие:

(ω.1) $\widetilde{\omega}_\varphi(\delta) \leqslant \omega(\delta)$;

(ω.2) $\widetilde{\omega}_\varphi(\delta)$ — неубывающая функция и $\lim_{\delta \to \infty} \widetilde{\omega}_\varphi(\delta) = 0$;

(ω.3) если φ не имеет разрывов, по абсолютной величине $> \varkappa$, то $\omega_\varphi(\delta) \leqslant 4(\widetilde{\omega}_\varphi(\delta) + \varkappa)$;

(ω.4) если $\widetilde{\omega}_\varphi(\delta_0) \leqslant \varepsilon_0$, то внутри каждого отрезка $\Delta = [\tau_1, \tau_2]$ длины $\leqslant \delta_0$ может быть не более одного разрыва φ, абсолютная величина которого $> \varepsilon_0$. Если такой разрыв существует и находится в точке t', то $\omega_\varphi[\tau_1, t') \leqslant \varepsilon_0$ и $\omega_\varphi(t', \tau_2] \leqslant \varepsilon_0$.

Пусть $w(z) = \widetilde{\omega}_\varphi(e^z)$ при $z \leqslant 0$, $w(z) = \widetilde{\omega}_\varphi(1)$ при $z > 0$; L^* — «расстояние Леви» между двумя монотонными функциями на прямой, ρ^* — «отклонение» двух замкнутых и ограниченных множеств на плоскости

$$\rho^*(E, F) = \max[\sup_{M \in E} \inf_{M' \in F} |M - M'|, \sup_{M' \in F} \inf_{M \in E} |M - M'|], \tag{1}$$

где $|M - M'|$ — длина отрезка, соединяющего точки плоскости M и M'.

Положим

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \rho^*(\Gamma_{\varphi_1}, \Gamma_{\varphi_2}) + L^*(w_1, w_2). \tag{2}$$

Теорема 1. *Совокупность ф. р. п. р. φ вместе с функцией d в качестве расстояния образует полное сепарабельное метрическое пространство D [0,1]. Если φ непрерывна во всех точках отрезка [0,1], то d-сходимость φ_n к φ равносильна равномерной на [0,1] сходимости φ_n к φ. Совокупность C^* непрерывных φ есть d-замкнутое подмножество D [0,1]. Соответствие $f \to \varphi$, где $f \in C$ [0,1], а φ — класс, содержащий f, есть гомеоморфное отображение пространства C [0,1] на C^*.*

Я считаю уместным привести здесь некоторые из лемм, на которые опирается доказательство теоремы 1.

Лемма 4. *Пусть $\{\varphi_n\}$ — последовательность элементов из D [0,1], удовлетворяющая условиям:* 1) *существует замкнутое и ограниченное множество Γ такое, что $\rho^*(\Gamma_{\varphi_n}, \Gamma) \to 0$ при $n \to \infty$,* 2) *существует функция $\omega(\delta)$, монотонно стремящаяся к нулю при $\delta \to 0$ и такая, что*

$$\widetilde{\omega}_{\varphi_n}(\delta) \leqslant \omega(\delta), \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 1.$$

Тогда найдется $\varphi \in D$ [0,1], для которой $\Gamma = \Gamma_\varphi$ и $d(\varphi_n, \varphi) \to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма 5. *Пространство $\mathfrak{R}^*$, «точками» которого являются замкнутые и ограниченные множества, лежащие в полосе $\{M : t(M) \in [0,1]\}$, а расстояние определено формулой* (1), *есть полное сепарабельное метрическое пространство Для компактности множества $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{R}^*$ необходимо и доста-*

точно, чтобы существовал прямоугольник Q такой, что $\Gamma \subseteq Q$ для всех $\Gamma \subseteq \mathfrak{G}$.

Условия компактности в $D[0,1]$ дает

Теорема 2. *Для компактности множества $\mathfrak{G} \subseteq D[0,1]$ необходимо и достаточно, чтобы существовали прямоугольник Q и функция $\omega(\delta)$, стремящаяся к нулю при $\delta \to 0$, такие, что*

1. $\Gamma_\varphi \subseteq Q$,
2. $\tilde{\omega}_\varphi(\delta) \leqslant \omega(\delta)$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$,

для всех $\varphi \in \mathfrak{G}$.

Теорема 3. *Сходимость в смысле расстояния d равносильна сходимости ф. р. п. р., введенной Скороходом* [3.12].

Теорема 4. *Если φ непрерывна в точке τ и последовательность $\{\varphi_n\}$ d-сходится к φ, то*

$$\varphi_n(\tau) \to \varphi(\tau).$$

(Здесь $\varphi_n(\tau)$ обозначает любую из точек Γ_{φ_n}, лежащих на прямой $t = \tau$).

Дополнение 2. Замечание о плотностях мер

Применение выведенных в главах I—III предельных теорем в конкретных вопросах требует определения класса тех множеств, которые являются множествами непрерывности предельных процессов.

Заметим, что если распределение P_2 в $\mathfrak{R}$ абсолютно непрерывно по отношению к распределению P_1 ($P_2 < P_1$), то класс $\mathfrak{S}_{P_1}$ множеств непрерывности распределения P_1 содержится в классе $\mathfrak{S}_{P_2}$ множеств непрерывности распределения P_2. Если, кроме того, и $P_1 < P_2$, т. е. меры P_1 и P_2 абсолютно непрерывны одна по другой ($P_1 \sim P_2$), то $\mathfrak{S}_{P_1} = \mathfrak{S}_{P_2}$. Таким образом, определив $\mathfrak{S}_{P_1}$, мы тем самым определяем и $\mathfrak{S}_{P_2}$ для любого распределения $P_2 \sim P_1$.

Пример 1*. Пусть W — винеровское распределение в $C[0,1]$ и W^α — распределение в $C[0,1]$, порождаемое из W при помощи отображения

$$x(t) \to x(t) + \alpha(t), \quad \alpha(0) = 0.$$

Простоты ради предположим, что $\alpha(t)$ имеет непрерывную на отрезке $[0,1]$ производную. Тогда

$$W^\alpha(A) = \int_A p^\alpha(x)\, dW,$$

где

$$p^\alpha(x) = \exp\left\{\int_0^1 \alpha'(t)\, dx(t) - \frac{1}{2}\int_0^1 (\alpha'(t))^2\, dt\right\}.$$

При дважды непрерывно дифференцируемой $\alpha(t)$ последнее выражение превращается в

$$p^\alpha(x) = \exp\left\{\alpha'(1)\, x(1) - \int_0^1 x(t)\, \alpha''(t)\, dt - \frac{1}{2}\int_1^1 (\alpha'(t))^2\, dt\right\}.$$

Поскольку $p^\alpha(x) > 0$,

$$W^\alpha \sim W.$$

* См. [1], а также дальнейшие ссылки в работе [2].

Пример 2. Пусть W_z — распределение в $C[0,1]$, сосредоточенное на множестве $\{x : x(0) = 0, x(1) = z\}$, с нормальными конечномерными распределениями, со средним

$$\mathbf{M}\xi_z(t) = tz$$

и корреляционной функцией

$$\mathbf{M}(\xi_z(t) \cdot \xi_z(s)) = t(1-s) + z^2 \cdot t \cdot s, \quad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1.$$

Нетрудно видеть, что

$$W(A \cap \{x : \alpha < x(1) < b\}) = \int\limits_{(a,b)} W_z(A) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Поэтому $W_z(A)$ можно рассматривать как условную вероятность того, что винеровская кривая $\xi(1) \in A$ при условии $\xi(1) = z$.

Определим отображение $\widetilde{\theta}$ пространства $C[0,1]$ в $C[0,\theta]$, $(0 < \theta < 1)$, которое переводит $x(t) \in C[0,1]$ в $x_1'(t) \in C[0,\theta]$

$$x_1'(t) = x(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \theta.$$

Тогда

$$W_z^{\widetilde{\theta}}(A) = \int\limits_A p_z^{\widetilde{\theta}}(x)\, dW^{\widetilde{\theta}}, \quad A \subseteq C[0,\theta],$$

где

$$p_z^{\widetilde{\theta}}(x) = \exp\left\{\int\limits_0^\theta \frac{z - x(t)}{1-t}\, dx(t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^\theta \left(\frac{z-x(t)}{1-t}\right)^2 dt\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{(z-x(\theta))^2}{2(1-\theta)} + \frac{z^2}{2}\right\} > 0. \tag{2}$$

Отметим попутно известный факт, заключающийся в том, что процесс $\xi_z(t)$ марковский, с «локальными характеристиками»

$$a(x,t) = \frac{z-x}{1-t}, \quad b(x,t) = 1. \tag{1}$$

Технику вычисления плотностей в приведенных примерах поясняет нижеследующая теорема. Пусть $a(x,t)$ — непрерывна по совокупности переменных x и t и удовлетворяет условию Липшица первого порядка по x:

$$|a(x_1,t) - a(x_2,t)| < K|x_1 - x_2|, \tag{3}$$

где K — константа. При голоморфном отображении

$$x \to y : y(t) = \int\limits_0^t a(\tau, y(\tau))\, d\tau + x(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{4}$$

пространства $C[0,1]$ на себя распределение W переходит, как известно (см. напр. [3]), в распределение W^π, соответствующее марковскому «процессу» $y(t)$ с «локальными характеристиками» $a(x,t)$ и $b(x,t) = 1$.

Теорема 1. *При условии* (3)

$$W^\pi(A) = \int\limits_A p^\pi(x)\, dW, \tag{5}$$

де

$$p^{\pi}(x) = \exp\left\{\int_0^1 a(t, x(t))\, dx(t) - \frac{1}{2}\int_0^1 a^2(t, x(t))\, dt\right\}, \tag{6}$$

ричем первый интеграл в равенстве (6) понимается как «стохастический нтеграл» *.

Заметим, что к формулам (5) и (6) нетрудно прийти из эвристических ображений. Однако их доказательство вовсе не тривиально.

Доказательство теоремы 1. Пусть $y(t) \in C[0,1]$ и $d = (t_0^d, t_1^d, \ldots, t_m^d)$, $= t_0^d < t_1^d < \ldots < t_m^d = 1$) — какое-либо разбиение отрезка $[0,1]$. Положим $y_k^d = y(t_k^d)$, $x_k^d = x(t_k^d)$, $\Delta y_k^d = y_k^d - y_{k-1}^d$, $\Delta x_k^d = x_k^d - x_{k-1}^d$, $\Delta t_k^d = t_k^d - t_{k-1}^d$. Определим непрерывное отображение $\pi(d)$ пространства $[0,1]$ в себя

$$\pi(d) : y \to Y^{\pi(d)},$$

полагая

$$\begin{cases} Y_0^d = y_0^d, \\ Y_1^d = Y_0^d + a(t_0^d, Y_0^d)\,\Delta t_1^d + \Delta x_1^d, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_m^d = Y_{m-1}^d + a(t_{m-1}^d, Y_{m-1}^d)\,\Delta t_m^d + \Delta x_m^d, \\ \text{и при } t_{i-1}^d \leqslant t < t_i^d\ (\leqslant t_m^d \text{ при } i = m), \\ Y^{\pi(d)}(t) = Y_{i-1}^d + a(t_{i-1}^d, Y_{i-1}^d)(t - t_{i-1}^d) + x(t) - x(t_{i-1}^d). \end{cases} \tag{7}$$

Лемма 1. *При*

$$\rho(d) = \max_i (t_i^d - t_{i-1}^d) \to 0 \tag{8}$$

равномерно на каждом компакте $E \subset C[0,1]$.

Доказательство проводится с использованием обычных в такого рода вопросах приемов и поэтому мы его опускаем.

Из леммы 1 и теоремы 1.10 вытекает

Лемма 2. *При* $\rho(d) \to 0$

$$(W^{\pi})^{\pi(d)} \Rightarrow W^{\pi}.$$

Пусть теперь P_1 и P_2 — два распределения в $C[0,1]$. Условимся через $(P_2 | P_1)(A)$ обозначать абсолютно непрерывную по отношению к P_1 часть меры P_2 и через $p(x; P_2, P_1)$ — соответствующую «плотность»:

$$(P_2 | P_1)(A) = \int_A p(x, P_2, P_1)\, dP_1. \tag{9}$$

Если

$$\int_C p(x; P_2, P_1)\, dP_1 = 1, \tag{10}$$

то, как легко видеть, P_2 абсолютно непрерывно по P_1.

Лемма 3. *Пусть для некоторой последовательности* $\{d_n\}$ *разбиений отрезка* $[0,1]$, *каждое из которых является продолжением предыдущего и*

* См. [3], гл. 9

для которых $\rho(d_n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *конечномерные распределения* $P_2^{(n)} = P_2^{t_0^{d_n}, \ldots, t_{m_n}^{d_n}}$ *абсолютно непрерывны относительно* $P_1^{(n)} = P_1^{t_0^{d_n}, \ldots, t_{m_n}^{d_n}}$. *Тогда при* $n \to \infty$ *функции*

$$p_n(x) = p\left(x\left(t_0^{d_n}\right), \ldots, x\left(t_{m_n}^{d_n}\right); P_2^{(n)}, P_1^{(n)}\right) \tag{11}$$

сходятся P_1*-почти всюду к*

$$p(x; P_2, P_1).$$

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно вытекает из следующей теоремы Андерсена и Иессена *:

Пусть $\Omega = \{\omega\}$ — абстрактное пространство; $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$ — монотонная последовательность борелевских полей подмножеств Ω; F_∞ — борелевское поле, порожденное $\bigcup_1^\infty F_n$; P — вероятностная мера на F_∞ и φ — вполне аддитивная функция на F_∞; φ_n (соотв. P_n) — функция, определенная на F_n и совпадающая на этом множестве с φ (соотв. P). Если φ_n абсолютно непрерывны по P_n, то при $n \to \infty$ соответствующие плотности $p(\omega; \varphi_n, P_n)$ сходятся P-почти всюду к пределу $p(\omega; \varphi, P)$.

Вернемся к доказательству леммы 3. Обозначим через F_n совокупность борелевских подмножеств пространства $C[0,1]$, определяемых по значениям $x(t)$ в точках n-го разбиения. Тогда F_∞ совпадает с системой всех борелевских подмножеств $C[0,1]$. Если рассматривать P_1 и P_2 только на F_n, то P_2 абсолютно непрерывно по P_1 и соответствующая плотность равна $p_n(x)$ (см. формулу (11)). Применяя теорему Андерсена — Иессена, получаем лемму 3.

Примечание. Если в условиях леммы 3 выполняется (10), то

$$P_2(A) = \int_A p(x; P_2, P_1)\, dP_1.$$

Лемма 4. *Распределение* $(W^\pi)^{\pi(d)}$ *абсолютно непрерывно относительно* W *и для* $x(t) \in C$, $x(0) = 0$

$$p\left(x; (W^\pi)^{\pi(d)}, W\right) = \exp\left\{\sum_{j=1}^m \left(a\left(t_{j-1}^d, x_{j-1}^d\right) \Delta x_j^d - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m a^2\left(t_{j-1}^d, x_{j-1}^d\right) \Delta t_j^d\right\}. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть d' — какое-либо продолжение разбиения d:

$$t_0^d = t_0^{d'} = 0 < t_1^{d'} < \ldots < t_{i_1}^{d'} = t_1^d < \ldots < t_{i_m}^{d'} = t_m^d = 1.$$

Как показывает простой подсчет, распределение

$$(W^\pi)^{\pi(d), t_0^{d'}, t_1^{d'}, \ldots, t_{i_m}^{d'}}$$

* См. [3], гл. VII, § 8 примечания к этому параграфу в конце книги, где эта теорема выводится из свойств мартингалов.

абсолютно непрерывно относительно

$$W^{t_0^{d'}, t_1^{d'}, \ldots, t_{i_m}^{d'}}$$

и соответствующая плотность равна (для $x(t)$ с $x(0)=0$)

$$\exp\left[-\sum_{j=1}^{m}\sum_{l>i_{j-1}}^{i_j}\frac{(\Delta x_i^{d'} - a\,(t_{j-1}^{d}, x_{j-1}^{d})\,\Delta t_i^{d'})^2}{2\Delta t_i^{d'}} + \sum_{i=1}^{i_m}\frac{(\Delta x_i^{d'})^2}{2\Delta t_i^{d'}}\right],$$

что после очевидных преобразований приводит к выражению, стоящему в правой части (12). Остается заметить, что интеграл от функции $p(x;\ (W^{\pi})^{\pi(d)}, W)$ по W по всему пространству равен единице, и применить лемму 3.

Первая сумма, стоящая в показателе в формуле (12) при $\rho(d)\to 0$, сходится в W-среднем квадратичном к случайной величине

$$\int_0^1 a(t, x(t))\,dx(t)$$

(см. [3,5], гл. 9). Вторая сумма в каждой точке $x\in C[0,1]$ сходится к

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 a^2(t, x(t))\,dt.$$

Из сказанного вытекает

Лемма 5. *Для надлежаще подобранной убывающей последовательности* $\{d_n\}$ *разбиений отрезка* $[0,1]$ *с* $\rho(d_n)\to 0$ *функция* $p(x;\ (W^{\pi})^{\pi(d_n)}, W)$ *сходится* W*-почти всюду к определенной равенством* (6) *функции* $p^{\pi}(x)$.

Лемма 6. *Для любого* $A\subset C[0,1]$, *для которого*

$$\sup_{x\in A}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|<\infty, \tag{13}$$

имеем

$$\int_A p(x;\ (W^{\pi})^{\pi(d_n)}, W)\,dW \to \int_A p^{\pi}(x)\,dW. \tag{14}$$

Отложим на время доказательство леммы 6 и покажем, каким образом из нее и леммы 2 выводится теорема 1. Положим, для краткости, $W^{(n)} = (W^{\pi})^{\pi(d_n)}$ и $p^{(n)}(x) = p(x;\ (W^{\pi})^{\pi(d_n)}, W)$. Возьмем компакт K_ε так, чтобы при всех n было

$$W^{(n)}(\overline{K}_\varepsilon) = \int_{\overline{K}_\varepsilon} p^{(n)}(x)\,dW \leqslant \varepsilon. \tag{15}$$

По лемме Фату тогда и

$$\int_{\overline{K}_\varepsilon} p^{\pi}(x)\,dW \leqslant \varepsilon. \tag{16}$$

Для произвольного $A\subseteq C[0,1]$ по лемме Фату

$$\int_A p^{\pi}(x)\,dW \leqslant \varliminf_n \int_A p^{(n)}(x)\,dW. \tag{17}$$

Вследствие же (15), (16) и леммы 6

$$\overline{\lim_n} \int_A p^{(n)}(x)\,dW \leqslant \overline{\lim_n} \int_{A \bigcap K_\varepsilon} p^{(n)}(x)\,dW + \varepsilon = \int_{A \bigcap K_\varepsilon} p^{\pi}(x)\,dW + \varepsilon \leqslant \int_A p^{\pi}(x)\,dW + \varepsilon. \tag{18}$$

Из (17) и (18) мы видим, что при $n \to \infty$ для любого $A \subseteq C[0,1]$

$$\int_A p^{(n)}(x)\,dW \to \int_A p^{\pi}(x)\,dW.$$

Поэтому и подавно при $n \to \infty$

$$W^{(n)} \Rightarrow W^* = \int_A p^{\pi}(x)\,dW. \tag{19}$$

Сравнивая (19) с утверждением леммы 2, мы приходим к равенству

$$W^{\pi} = W^*,$$

что требовалось доказать.

Возвратимся к доказательству леммы 6.

Лемма 7. *Пусть функции $f_n(x) \geqslant 0$ сходятся W-почти всюду к функции $f(x)$ и пусть при некотором $\lambda > 1$*

$$\int_A f_n^{\lambda}(x)\,dW \leqslant C,$$

где C — постоянная. Тогда для любого $A' \subseteq A$

$$\int_{A'} f_n(x)\,dW \to \int_A f(x)\,dW.$$

Эта лемма легко выводится из известных теорем о переходе к пределу под знаком интеграла (см., напр., [1.4], § 26, теорема 3).

Пусть теперь $S(t, a) = \{x : \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} |x(\tau)| \leqslant a\}$, $a_j = a(t_j^d, x_j^d)$ и

$$\zeta_l = \exp\left\{\sum_{j=1}^{l} a_{j-1}\,\Delta x_j^d - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l} a_{j-1}^2\,\Delta t_j^d\right\}. \tag{20}$$

Заметим, что вследствие (3)

$$a^2(x, t) \leqslant (\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |a(0, t)| + K|x|)^2 \leqslant K'(1 + x^2).$$

Мы имеем ($\lambda > 1$).

$$u_l(\lambda) = \int_{S(t_1^d, a)} \zeta_l^{\lambda}\,dW \leqslant \int_{S(t_{l-1}^d, a)} \zeta_l^{\lambda}\,dW =$$

$$= \int_{S(t_{l-1}^d, a)} \zeta_{l-1}^{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{2} a_{l-1}^2 \Delta t_l^d} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n a_{l-1}^n (\Delta x_l^d)^n}{n!}\right) dW =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{S(t^d_{l-1},\, a)} \zeta^{\lambda}_{l-1} e^{-\frac{\lambda}{2} a^2_{l-1} \Delta t^d_l} \left(\frac{\lambda^n a^n_{l-1} \mathbf{M} (\Delta x^d_l)^n}{n!} \right) dW =$$

$$= \int\limits_{S(t^d_{l-1},\, a)} \zeta^{\lambda}_{l-1} e^{\frac{\lambda^2 - \lambda}{2} a^2_{l-1} \Delta t^d_l} \; W \leqslant \exp\left\{ \frac{\lambda^2 - \lambda}{2} K' (1 + a^2) \Delta t^d_l \right\} \cdot u_{l-1}(\lambda).$$

Из этих неравенств видно, что

$$u_m(\lambda) = \int\limits_{S(t^d_m,\, a)} \zeta^{\lambda}_m \, dW = \int\limits_{\{x : \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| \leqslant a\}} (p^{(n)}(x))^{\lambda} \, dW \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{ \frac{\lambda^2 - \lambda}{2} K' (1 + a^2) \right\}.$$

Применяя теперь к последовательности $\{p^{(n)}(x)\}$ лемму 7, мы получаем лемму 6, а вместе с тем и теорему 1.

Примечание к теореме 1. Применяя известное преобразование

$$x(t) = \int\limits_0^{y(t)} (b(z, t))^{-1/2} \, dz,$$

переводящее марковский процесс $y(t)$ с «локальными характеристиками» $a(x, t)$ и $b(x, t)$ в марковский же процесс, но уже с характеристиками $a, (x, t), b, (x, t) = 1$, можно показать, что в широких условиях распределение в $C[0,1]$, соответствующее процессу с характеристиками $a(x, t)$, $b(x, t)$ абсолютно непрерывно относительно распределения, соответствующего процессу с характеристиками 0 и $b(x, t)$.

Мы не будем здесь на этом останавливаться.

Математический институт
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
5.7. 56

ЛИТЕРАТУРА

К главе 1

[1.1] А. Н. Колмогоров и Б. В. Гнеденко, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, ГТТИ, 1949.

[1.2] А. Д. Александров, Additive set functions in abstract spaces, Матем. сб. 8 (1940), 307—348; 9 (1941), 563—628; 13 (1943), 169—238.

[1.3] А. А. Марков, On mean values and exterior densities, Матем. сб. 4 (1938), 165—191.

[1.4] П. Халмош, Теория меры, ИЛ, 1953.

[1.5] E. Mourier. Eléments aléatoires dans un espace de Banach. These. Paris 1954.

[1.6] R. Fortet, Normalverteilte Zufallselemente in Banachschen Räumen. Anwendungen auf zufällige Functionen, Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Math. Stat. in Berlin 19 bis. 22 Oktober 1954. 29—35.

[1.7] А. Н. Колмогоров, La transformation de Laplace dans les espaces linéaires, C. R. Akad. Sci., 200 (1935) 1717.

[1.8] С. В. Фомин, О конечных инвариантных мерах в динамических системах, Матем. сб., 12 (1942), 99—108.

[1.9] Н. Крылов и Н. Боголюбов, La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la méchanique non linéaire, Ann. of Math., 38 (1937) 65—113.

[1.10] I. C. Oxtoby and S. M. Ulam, On the existence of a measure, invariant under a transformation, Ann. of Math., 40 (1939), 560.

К главе 2

[2.1] Е. Е. Слуцкий Qualche propositione relativa alla theoria della funzioni aleatorie, Giorn. d. Att., 8, (1937), 183—199.

[2.2] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, ГОНТИ, 1935.

[2.3] Е. Б. Дынкин, Критерии непрерывности и отсутствия разрывов второго рода для траекторий марковского случайного процесса, Изв. АН СССР, сер. матем., 16 (1952), 563—72.

[2.4] J. R. Kinney, Continuity properties of sample functions of Markov processes, Trans. A. M. S., 74 (1953), 280—302.

[2.5] W. Ambrose, On measurable stochastic processes, Trans. A. M. S., 47, (1940), 66—79.

[2.6] A. Fuchs, Sur la continuité stochastique des processus stochastiques réels de Markoff., C. R. Acad. Sci., 237 (1953), 1388.

[2.7] A. Fuchs, Sur un théorème de N. Wiener, C. R. Acad. Sci., 240 (1955), 1396.

[2.8] А. Н. Колмогоров и Ю. В. Прохоров, Случайные функции и предельные теоремы, Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Stat. u. Berlin. 19—22 Okt. 1954.

[2.9] J. L. Doob, Heuristic approach to the Kolmogorov — Smirnov theorems, Ann. Math. Stat., 20 (1949), 393—403.

[2.10] T.W. Anderson and D.A. Darling, Asymptotic theory of certain «goodness of fit» criteria based on stochastic processes, Ann. Math. Stat., 23 (1952), 193—212.

[2.11] M. L. Donsker, Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogoroff — Smirnov theorems, Ann. Math. Stat., 23 (1952), 277—281.

[2.12] A. Н. Колмогоров, Sulla determinazione empirico di una legge di distribuzione, Giorn. Ist. Att., 4 (1933), 83—91, 4 (1933), 83—91.

[2.13] Н. В. Смирнов, Об уклонениях эмпирической кривой распределения, Матем. сб., 6 (1939), 3—26.

[2.14] D. A. Darling, The Cramér—Smirnov test in the parametric case, Ann. Math. Stat., 26 (1955), 1—19.

[2.15] U. Grenander and M. Rosenblatt, Statistical spectral analysis of time series arising from stationary stochastic processes, Ann. Math. Stat., 24 (1953), 537—558.

[2.16] И. И. Гихман, Докторская диссертация, 1955.

[2.17] И. И. Гихман, Процессы Маркова в задачах математической статистики, Укр. матем. ж., 6, № 1 (1954), 25.

[2.18] И. И. Гихман, Об эмпирических функциях распределения, ДАН СССР. 82 (1952).

[2.19] И. И. Гихман, О некоторых предельных теоремах для условных распределений, ДАН СССР, 56 (1947).

[2.20] И. И. Гихман, О некоторых предельных теоремах для условных распределений и связанных с ними задачах математической статистики, Укр. матем ж., 5, № 4 (1953).

[2.21] И. И. Гихман, Некоторые замечания к критерию согласия А. Н. Колмогорова, ДАН СССР, 91, № 4 (1953).

[2.22] S. Maruyama, Continuous Markov processes and stochastic equations, Rend. Circolo mat. Palermo, 4 (1955), 48.

К главе 3

[3.1] А. Н. Колмогоров, Ueber die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung , Изв. АН СССР, сер. физ.-матем. (1933), 363—372.

[3.2] А. Н. Колмогоров, Eine Verallgemeinerung des Laplace — Liapounoffschen Satzes, Изв. АН СССР, сер. физ.-матем. (1931), 959—962.

[3.3] M. D. Donsker, An invariance principle for certain probability limit theorems, Mem. Amer. Math. Soc., **6** (1951), 1—12.
[3.4] P. Erdos, M. Kac, On certain limit theorems on the theory of probability, Bull. A. M. S., **53** (1946), 292—302.
[3.5] P. Erdos, M. Kac, On the number of positive sums of independent random variables, Bull. A. M. S., **53** (1947), 1011.
[3.6] И. И. Гихман, Об одной теореме А. Н. Колмогорова, Уч. зап. Киевск. Гос. ун-та, **12**, № 6 (1953), 75—94.
[3.7] Ю. В. Прохоров, Распределения вероятностей в функциональных пространствах, Усп. матем. наук, **8** (1953), 3, 165.
[3.8] И. Г. Петровский, Ueber das Irrfahrt Problem, Math. Ann., **109** (1934), 425.
[3.9] А. Я. Хинчин, Асимптотические законы теории вероятностей, ОНТИ, 1936.
[3.10] M. Kac, On some connections between probability theory and differential and integral equations, Proc. Sec. Berkeley Symp., 1951, 189—215.
[3.11] С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, ГТТИ, 1946.
[3.12] А. В. Скороход, О связи между последовательностью сумм независимых случайных величин и однородными случайными процессами с независимыми приращениями, ДАН СССР, **104**, № 3 (1955).
[3.13] Е. Б. Дынкин, Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями, Изв. АН СССР, сер. матем., **19** (1955), 247—267.
[3.14] Ю. В. Прохоров, Функциональные методы в предельных теоремах теории вероятностей, Докторская диссертация, 1956.

К главе 4

[4.1] A. H. Колмогоров, Ueber das Gesetz des iterierten Logarithmus, Math. Ann., **101** (1929), 126.
[4.2] K. G. Essen, Fourier analysis of distribution functions... Acta Math., **77** (1945), 1—125.
[4.3] K. L. Chung, Asymptotic distribution of the maximum cumulative sums, Bull. AMS., **54** (1948), 1162.
[4.4] K. L. Chung, On maximum of partial sums of independent random variables, Trans. AMS, **64** (1948), 205—233.
[4.5] K. L. Chung, An estimate, concerning the Kolmogorov limit distribution, Trans. AMS, **67** (1949), 36.
[4.6] Н. В. Смирнов, Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным, Успехи матем. наук, **10** (1944), 179.
[4.7] В. С. Королюк, Асимптотические разложения для критериев согласия А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова, Изв. АН СССР, сер. матем., **19** (1955), 103—124.

К дополнению 1

[1] А. Н. Колмогоров, О сходимости А. В. Скорохода, Теория вероятностей и ее применения, **1**, вып. 2 (1956).

К дополнению 2

[1] Cameron and Martin, Ann. of Math., **45** (1949), 386.
[2] И. М. Гельфанд и А. М. Яглом, Интегрирование в функциональных пространствах и его применения в квантовой физике, Успехи матем. наук, т. **9**, № **1** (1956).
[3] J. L. Doob, Stochastic processes, N. Y., 1953.

CONVERGENCE OF RANDOM PROCESSES AND LIMIT THEOREMS IN PROBABILITY THEORY

Yu. V. PROHOROV (MOSCOW)

(*Summary*)

The convergence of stochastic processes is defined in terms of the so-called «weak convergence» (w. c.) of probability measures in appropriate functional spaces (c. s. m. s.).

Chapter 1. Let $\mathfrak{R}$ be the c. s. m. s. and v a set of all finite measures on $\mathfrak{R}$. The distance $L(\mu_1, \mu_2)$ (that is analogous to the Levy distance) is introduced, and equivalence of L-convergence and w. c. is proved. It is shown that $V(\mathfrak{R}) = (v, L)$ is c. s. m. s. Then, the necessary and sufficient conditions for compactness in $V(\mathfrak{R})$ are given.

In section 1.6 the concept of «characteristic functionale» is applied to the study of w. c. of measures in Hilbert space.

Chapter 2. On the basis of the above results the necessary and sufficient compactness conditions for families of probability measures in spaces $C[0,1]$ and $D[0, 1]$ (space of functions that are continuous in $[0,1]$ except for jumps) are formulated.

Chapter 3. The general form of the «invariance principle» for the sums of independent random variables is developed.

Chapter 4. An estimate of the remainder term in the well known Kolmogorov theorem is given (cf. [3.1]).

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 2
1956

О СХОДИМОСТИ А. В. СКОРОХОДА

А. Н. КОЛМОГОРОВ

При описании временного течения реального процесса с помощью функции $f(t)$ от времени t, принимающей значения из надлежащим образом выбранного «фазового пространства» X, часто оказывается естественным и законным допущение, что функция f имеет только разрывы первого рода (скачки). Для детального исследования такого рода процессов оказывается полезным введение в множестве D функций с разрывами первого рода (которые для определенности мы будем рассматривать на единичном отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$) соответствующей топологии.

Топология равномерной сходимости, естественная при изучении непрерывных процессов, оказывается при изучении процессов с разрывами первого рода слишком сильной. Например, естественно желать, чтобы последовательность функций

$$f_n(t) = \begin{cases} x_1 \text{ при } t < t_n, \\ x_2 \text{ при } t > t_n, \end{cases}$$

где $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$ сходилась к функции

$$f(t) = \begin{cases} x_1 \text{ при } t < t_0, \\ x_2 \text{ при } t > t_0, \end{cases}$$

так как функция f_n при большом n отличается от функции f лишь малым сдвигом момента скачка из состояния x_1 в состояние x_2. Как известно, в пространстве равномерной сходимости такая сходимость при $x_1 \neq x_2$ не имеет места.

С другой стороны, топология в D не должна быть слишком слабой, так как желательно, чтобы наиболее существенные свойства функции $f \in D$ сохранялись при предельном переходе. Например, желательно, чтобы в предположении сходимости f_n к f из

$$t_n \to t,$$

$$f_n(t_n + 0) - f_n(t_n - 0) \to c \neq 0$$

вытекало, что

$$f(t + 0) - f(t - 0) = c.$$

Уже соблюдение высказанных сейчас двух пожеланий требует введения в D новой топологии, специально приспособленной к потребностям

исследования процессов с разрывами первого рода. Такого рода топология предложена в работах [1,2] А. В. Скороходом. В этих работах А. В. Скороход для случая действительных функций $f(t)$ (т. е. для случая, когда X есть действительная прямая) определяет в D некоторую сходимость (мы будем называть ее S-сходимостью) и отмечает, что эта сходимость превращает множество D в хаусдорфово топологическое пространство. Далее в § 2 дается новое определение S-сходимости, применимое в предположении, что X есть произвольное метрическое пространство, и обнаруживается, что возникающее таким образом топологическое пространство SD метризуемо. Введенное в § 2 с этой целью расстояние $s(f, g)$ и соответствующая ему равномерная топология представляются мне весьма естественными и удобными в применениях, несмотря на то, что даже в случае полного пространства X метрическое пространство sD не полно. В конце § 2 дается одно простое необходимое и достаточное условие S-компактности.

Результаты § 3 (как и теорема IV § 2) существенно опираются на предположение, что фазовое пространство X полно (для простоты мы его в дальнейшем изложении принимаем с самого начала).

В § 3 пополнение метрического пространства sD получает конкретную интерпретацию при помощи D-кривых в пространстве $R = T \times X$. Эта интерпретация используется для доказательства возможности ввести в D другое расстояние $s^*(f, g)$, порождающее ту же самую скороходовскую сходимость и топологию, но превращающее D в полное метрическое пространство s^*D. При изложении результатов этой работы в семинаре по теории вероятностей в Московском университете я поставил задачу возможно более простого явного построения расстояния $s^*(f, g)$. Эта задача была решена Ю. В. Прохоровым [3].

§ 1 посвящен некоторым вспомогательным рассмотрениям, польза которых обнаруживается в § 3. Содержание § 2 можно было бы с таким же удобством изложить и не вводя множества Θ, а пользуясь обычной техникой изображения процессов с разрывами первого рода, например при помощи непрерывных справа функций

$$f^+(t) = f(t + 0),$$

действительного переменного t.

§ 1. Класс функций $D = D_X$.

При описании реальных процессов с помощью функций $f(t)$ с разрывами первого рода обычно можно считать, что реальные явления, происходящие в момент скачка t, полностью описываются предельными значениями слева и справа: $f(t - 0)$ и $f(t + 0)$. Только в порядке математической условности само значение $f(t)$ в точке скачка определяется при помощи одного из соглашений

$$f(t) = f(t - 0), \quad \text{или} \quad f(t) = f(t + 0),$$

или, в случае действительных функций, соглашением

$$f(t) = \frac{f(t - 0) + f(t + 0)}{2}$$

По существу логичнее, вообще, рассматривать функции $f(\theta)$ от символов вида $t-0$, или $t+0$, и лишь в случае $f(t-0)=f(t+0)$ обозначать их общее значение через $f(t)$, считая $f(t)$ неопределенным в случае $f(t-0)\neq f(t+0)$. При изложении теории D-кривых, излагаемой в § 3, такой подход к делу имеет и формальные преимущества: некоторая дополнительная затрата труда в § 1 окупается более сжатым и прозрачным изложением § 3.

Будем обозначать через Θ множество символов θ одного из двух видов:

$$\theta = t-0, \quad 0<t\leqslant 1,$$

$$\theta = t+0, \quad 0\leqslant t<1.$$

Отношения порядка между элементами $\theta\in\Theta$ устанавливаются при помощи соглашений

1) $t\pm 0<t'\pm 0$, если $t<t'$,

2) $t-0<t+0$.

Будем считать, что

$$\theta_n\to t-0,$$

если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $n(\varepsilon)$, что при $n\geqslant n(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$t-\varepsilon+0\leqslant\theta_n\leqslant t-0,$$

считать, что

$$\theta_n\to t+0,$$

если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $n(\varepsilon)$, что при $n\geqslant n(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$t+0\leqslant\theta_n\leqslant t+\varepsilon-0.$$

Определенная таким образом сходимость превращает множество Θ в бикомпактное топологическое пространство (см. [5]). То обстоятельство, что это пространство не метризуемо, не помешает его употреблению в дальнейших построениях.

Класс D_X по определению состоит из функций $f(\theta)$, определенных на Θ со значениями из метрического пространства X, непрерывных в том смысле, что из

$$\theta_n\to\theta$$

вытекает

$$f(\theta_n)\to f(\theta).$$

Легко доказать, что для любой функции $f\in D=D_X$ функция

$$f^+(t)=f(t+0)$$

определена при всех t из полусегмента $0\leqslant t<1$, непрерывна справа и имеет в каждой точке t полусегмента $0<t\leqslant 1$ предельное значение слева

$$f^+(t-0)=f(t-0).$$

Ясно, что соответствие между функциями $f\in D$ и функциями f^+, обладающими описанными свойствами, взаимно однозначно.

Для любого множества $M \subseteq \Theta$ определим «колебание» функции $f \in$ на M формулой

$$\omega f(M) = \sup_{x,\, x' \in M} \rho(x, x').$$

Специальный интерес будут далее представлять «сегменты» пространст Θ, т. е. множества

$$[\theta', \theta''] = \{\theta;\ \theta' \leqslant \theta \leqslant \theta''\}.$$

В частности, сегмент $[t-0,\ t+0]$ состоит из двух точек — своих ко цов $t-0$ и $t+0$. Для него

$$\omega f\,[t-0,\ t+0] = |f(t+0) - f(t-0)|.$$

Легко доказывается

Теорема I. *Для того, чтобы определенная на θ функция $f(\theta)$ со зн чениями из X принадлежала классу D, необходимо и достаточно суще ствование при любом $\varepsilon > 0$ таких*

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1,$$

что при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнено неравенство

$$\omega f\,[t_{k-1} + 0,\ t_k - 0] < \varepsilon.$$

§ 2. S-сходимость и расстояние $s(f, g)$

Определение 1. *Две функции $f \in D$ и $g \in D$ называются ε-эквив лентными, если существуют такие r и*

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = 1,$$

$$0 = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_r = 1,$$

что при $k = 1, 2, \ldots, r$ соблюдаются неравенства

$$|t_k - t'_k| \leqslant \varepsilon,$$

$$\sup_{\substack{\theta \in [t_{k-1}+0,\ t_k-0] \\ \theta' \in [t'_{k-1}+0,\ t'_k-0]}} \rho(f(\theta), g(\theta')) \leqslant \varepsilon.$$

ε-эквивалентность далее обозначается символом

$$f \overset{\varepsilon}{\sim} g.$$

Определение 2. *Последовательность функций $f_n \in D$ называется S-схо дящейся к функции $f \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n(\varepsilon)$ что при $n \geqslant n(\varepsilon)$*

$$f_n \overset{\varepsilon}{\sim} f.$$

S-сходимость далее обозначается символом

$$f_n \xrightarrow{S} f.$$

Это и есть сходимость, введенная в случае, когда X есть числовая пря мая, А. В. Скороходом.

Положим теперь

$$s(f, g) = \inf_{f \overset{\varepsilon}{\sim} g} \varepsilon.$$

Теорема II. *Множество D с расстоянием $s(f,g)$ является метрическим пространством.*

В самом деле, легко видеть, что $s(f, g)$ для любых $f \in D$ и $g \in D$ действительно и не отрицательно. Из теоремы 1 вытекает, что

$$s(f, f) = 0.$$

Без большого труда можно установить, что

$$s(f, g) = 0$$

только в случае $f = g$. Симметричность расстояния $s(f, g)$ очевидна в силу его определения. Выполнение неравенства

$$s(f, h) \leqslant s(f, g) + s(g, h)$$

вытекает из следующей легко доказываемой леммы:

Лемма. *Если*

$$f \overset{\varepsilon}{\sim} g, \quad g \overset{\varepsilon'}{\sim} h,$$

то

$$f \overset{\varepsilon+\varepsilon'}{\sim} h.$$

Очевидна

Теорема III. *Для сходимости*

$$f_n \xrightarrow{S} f$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$s(f_n, f) \to 0.$$

Если только пространство X содержит две различные точки $x_1 \neq x_2$, то метрическое пространство sD не является полным, так как при

$$t_n < t_0 < 1,$$
$$t_n \to t_0,$$

последовательность функций

$$f_n(\theta) = \begin{cases} x_1 \text{ при } 0 + 0 \leqslant \theta \leqslant t_n - 0, \\ x_2 \text{ при } t_n + 0 \leqslant \theta \leqslant t_0 - 0, \\ x_1 \text{ при } t_0 + 0 \leqslant \theta \leqslant 1 - 0 \end{cases}$$

удовлетворяет критерию Коши, но не является сходящейся. В связи с этим интересна

Теорема IV. *Для того, чтобы последовательность функций $f_n \in D$, удовлетворяющая критерию Коши*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{p \geqslant 0} s(f_n, f_{n+p}) = 0,$$

сходилась к функции $f \in D$, необходимо и достаточно условие:

(*) *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что при каждом* n *и* $t \in (0; 1)$

$$\omega f_n [0 + 0,\ \delta - 0] < \varepsilon,$$
$$\omega f_n [1 - \delta + 0,\ 1 - 0] < \varepsilon,$$
$$\omega^* f_n [t + 0,\ t + \delta - 0] < \varepsilon,$$

где

$$\omega^* f [\theta, \theta'] = \inf_t \max \{\omega f [\theta, t - 0],\ \omega f (t + 0, \theta')\}.$$

Следует отметить, что величины $\omega^* f$ сходны с величинами γ_f, уже применявшимися при изучении функций класса D Е. Б. Дынкиным в работе [4].

К теореме IV тесно примыкает

Теорема V. *Для того, чтобы множество* $M \subseteq D$ *было компактно в пространстве* SD *скороходовской сходимости, необходимо и достаточно одновременное выполнение двух условий*:

1) *Существует такой компакт* $K \subseteq D$, *что все значения* $f(\theta)$ *функции* $t \in M$ *в точках* $\theta \in \Theta$ *принадлежат* K.

2) *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что из* $f \in M$ *вытекают неравенства*

$$\omega f [0 + 0,\ \delta - 0] < \varepsilon,$$
$$\omega f [1 - \delta + 0,\ 1 - 0] < \varepsilon,$$
$$\omega^* f [t + 0,\ t + \delta - 0] < \varepsilon.$$

§ 3. Графики функций класса D и D-кривые в пространстве $R = T \times X$

Будем обозначать буквой T единичный сегмент

$$T = \{t;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

действительной прямой и буквой R прямое произведение

$$R = T \times X = \{(t, x);\ t \in T,\ x \in X\}.$$

Это прямое произведение будем рассматривать как метрическое пространство с расстоянием

$$\rho ((t, x), (t', x')) = \max \{|t' - t|,\ \rho (x, x')\}.$$

Графиком функции $f \in D$ будем называть множество Γ_f точек пространства R любого из двух типов:

$$(t, f(t - 0)) \text{ или } (t, f(t + 0)).$$

Легко видеть, что определенная на Θ функция

$$\varphi_f (t - 0) = (t, f(t - 0)), \qquad \varphi_f (t + 0) = (t, f(t + 0))$$

со значениями из R непрерывна в смысле, разъясненном в § 1. Она отображает Θ на Γ_f, причем порядок, установленный на Θ (отношения неравенства $\theta < \theta'$, определенные в § 1), создает определенный порядок пробегания графика Γ_f.

Будем теперь независимо от графиков функции f из $D = D_X$ рассматривать непрерывные в смысле § 1 отображения Θ в пространство R, т. е. функции $\varphi(\theta)$ класса D_R. Назовем две функции $\varphi \in D_R$ и $\psi \in D_R$ эквивалентными, если существуют такие монотонные, т. е. удовлетворяющие условию

$$\chi(\theta') \geqslant \chi(\theta), \qquad \text{когда } \theta' > \theta,$$

отображения χ_1 и χ_2 пространства Θ на самого себя, что

$$\varphi(\chi_1(\theta)) = \psi(\chi_2(\theta)).$$

По этому отношению эквивалентности функции $\varphi \in D_R$ разбиваются на классы $\tilde{\varphi}$, которые естественно называть D-кривыми в пространстве R. Между D-кривыми естественно ввести расстояние при помощи формулы

$$\rho(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = \inf_{\substack{\varphi \in \tilde{\varphi} \\ \psi \in \tilde{\psi}}} \sup_{\theta \in \Theta} \rho(\varphi(\theta), \psi(\theta)).$$

Теория D-кривых вполне аналогична теории непрерывных кривых. Расстояние $\rho(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ превращает множество $\tilde{\Phi}$ всех D-кривых пространства R в полное метрическое пространство. Имеет место

Теорема VI. *Функция $f \in D$ однозначно определяется соответствующей ей кривой*

$$\tilde{f} = \tilde{\varphi}_f.$$

При этом всегда

$$s(f, g) = \rho(\tilde{f}, \tilde{g}).$$

Теорема VI доставляет нам новую интерпретацию расстояния $s(f, g)$ и S-сходимости: S-сходимость последовательности функции f_n к функции f оказывается равносильной сходимости в смысле расстояния $\rho(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ кривых $\tilde{f}_n$ к кривой $\tilde{f}$.

Для дальнейшего целесообразно ввести обозначения $\tau_\varphi(\theta)$, $\xi_\varphi(\theta)$ компонент функции

$$\varphi(\theta) = (\tau_\varphi(\theta), \xi_\varphi(\theta)).$$

Обозначим через Λ множество D-кривых $\tilde{f}$, соответствующих функциям $f \in D$, а через $\overline{\Lambda}$—замыкание множества Λ в пространстве $\tilde{\Phi}$. Легко доказать, что

$$\varphi \in \tilde{\varphi} \in \overline{\Lambda},$$

в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:

(λ_1) $\tau_\varphi(\theta)$ отображает θ на все множество T,

(λ_2) из $\theta < \theta'$ вытекает $\tau_\varphi(\theta) \leqslant \tau_\varphi(\theta')$.

В силу условий (λ_1), (λ_2) для функции $\varphi \in \tilde{\varphi} \in \Lambda$ множества $\tau_\varphi^{-1}(t)$ тех θ, для которых

$$\tau_\varphi(\theta) = t,$$

являются сегментами пространства Θ:

$$\tau_\varphi^{-1}(t) = [\theta'_\varphi(t), \theta''_\varphi(t)].$$

Когда параметр θ пробегает сегмент $\tau_\varphi^{-1}(t)$, значение $\tau_\varphi(t)$ остается постоянным, а $\xi_\varphi(\theta)$ пробегает ту или иную последовательность точек фазового пространства X. Поэтому кривые $\tilde{\varphi} \in \overline{\Lambda}$ могут рассматриваться как запись своеобразных обобщенных процессов с разрывами первого рода, поведение которых в момент времени t может быть, вообще говоря, более сложным, чем простой переход из состояния $f(t-0)$ в состояние $f(t+0)$. Такие обобщенные процессы могут естественным образом возникать в качестве предельных ограничений, подобных условию (*) в теореме IV, мешающих сгущению в одной точке t нескольких не исчезающе малых скачков. Возможно, что введение такого рода обобщенных процессов окажется полезным в некоторых вполне конкретных исследованиях по предельным свойствам случайных процессов. Не развивая этой идеи дальше, я использую анализ устройства множества $\overline{\Lambda}$ лишь как вспомогательное средство для доказательства возможности введения в пространстве SD расстояния $s^*(f, g)$, отличного от $s(f, g)$ и превращающего SD в полное метрическое пространство. С этой целью я докажу такую лемму:

Лемма. *Множество Λ является в пространстве Φ множеством типа G_δ.*

Доказательство. Легко показать, что при заданных $t \in T$ и $\tilde{\varphi} \in \overline{\Lambda}$ величина

$$\omega_\varphi^*[\tau_\varphi^{-1}(t)]$$

для всех $\varphi \in \tilde{\varphi}$ одинакова, т. е. характеризует свойства кривой $\tilde{\varphi}$, а не ее параметрического представления φ; мы обозначим эту величину через $\omega_{\tilde{\varphi}}^*(t)$. Условие

$$(\mu) \qquad \omega_{\tilde{\varphi}}^*(t) = 0 \quad \text{при всех } t \in T$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы $\tilde{\varphi} \in \Lambda$ принадлежала множеству Λ. Поэтому,

$$\Lambda = \overline{\Lambda} \setminus \bigcup_n \Lambda_n, \tag{1}$$

где Λ_n есть множество тех $\tilde{\varphi} \in \overline{\Lambda}$, для которых

$$\sup_{t \in T} \omega_{\tilde{\varphi}}^*(t) \geqslant \frac{1}{n}.$$

Множество $\overline{\Lambda}$ замкнуто в Φ по самому определению. Можно доказать, что множества Λ_n тоже замкнуты в Φ. Из замкнутости множеств $\overline{\Lambda}$ и Λ_n и формулы (1) непосредственно вытекает наша лемма.

Из доказанной леммы, в силу известной теоремы П. С. Александрова, вытекает, что во множестве Λ можно ввести новое расстояние $\rho^*(\tilde{f}, \tilde{g})$, топологически эквивалентное расстоянию $\rho(\tilde{f}, \tilde{g})$, но превращающее Λ в полное метрическое пространство.

Полагая

$$s^*(f, g) = \rho^*(\tilde{f}, \tilde{g})$$

и вспомнив теорему VI, мы видим, что имеет место

Теорема VII. *В множестве D может быть введено расстояние $s^*(f, g)$, топологически эквивалентное расстоянию $s(f, g)$ и превращающее D в полное метрическое пространство.*

Поступила в редакцию
25.7.56

ЛИТЕРАТУРА

1] А. В. Скороход, ДАН СССР, **104** (1955), 364—367.
2] А. В. Скороход, ДАН СССР, **106** (1956), 781—784.
3] Ю. В. Прохоров, Теория вероятностей и ее применения, 1, вып. 2 (1956), 175—237.
4] Е. Б. Дынкин, Изв. АН СССР, сер. матем., **16** (1952), 563—572.
5] П. С. Урысон, Труды по топологии и другим областям математики, т. II, Москва, 1951, 937.

ON THE SCOROKHOD CONVERGENCE

A. N. KOLMOGOROV (*MOSCOW*)

(*Summary*)

The paper contains a new definition of the S-convergence in a D-space of functions having only first order discontinuities, which was introduced by A. Skorohod [2]. The new definition applies to function $f(t)$ of real variable t which takes on values in an arbitrary metric space. It is proved that the S-convergence may be generated by the distance $S(f, g)$, which converts D into a complete metric space.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 2
1956

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ О ТИПЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО МАЛЫМ ВЫБОРКАМ

А. А. ПЕТРОВ

Введение

Пусть имеется s выборок объема n

$$\begin{matrix} x_{11}, \dots, x_{1n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{s1}, \dots, x_{sn}. \end{matrix} \qquad (0.1$$

Ставится вопрос, допустимо ли предположение, что i-ая выборка (при любом i) представляет собой совокупность n наблюдений случайной величины ξ_i с функцией распределения $F(a_i x + b_i)$, где функция F одна и та же для всех выборок, а параметры a_i, b_i могут быть различными для различных выборок и нам не известны. Сформулированное предположение будем называть гипотезой H о типе распределения.

Для проверки гипотезы H естественно выбрать некоторую характеристику $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, являющуюся функцией выборочных значений $x_1, \dots, x_n$ и инвариантную относительно преобразований вида $x_i' = ax_i + b$ ($i = 1, \dots, n$). Если случайные величины $x_1, \dots, x_n$ независимы и одинаково распределены с функцией распределения $F(ax + b)$, то распределение случайной величины φ зависит, конечно, только от вида самой функции F и не зависит от выбора a и b. После того как характеристика φ (статистический критерий) выбрана, проверка гипотезы H проводится обычно по следующей схеме. Вычисляется теоретическая функция распределения $\Phi(x)$ характеристики φ в предположении, что величины $x_1, \dots, x_n$ независимы и одинаково распределены с функцией распределения $F(x)$. Данные выборок (0.1) дают s наблюдений величины φ. По ним строится эмпирическая функция распределения $\Phi_s(x)$. Затем с помощью одного из обычных критериев (например критерия Колмогорова или χ^2) оценивается согласие $\Phi_s(x)$ с вычисленной теоретической функцией распределения $\Phi(x)$. При обнаружении значимых отклонений гипотеза H отвергается; в случае, если таких отклонений не обнаруживается — гипотеза H считается согласующейся с данными опыта.

В качестве характеристики φ можно выбрать, например, величины

$$\frac{x_{\max} - \bar{x}}{\sqrt{m_2}}, \quad \frac{x_{\min} - \bar{x}}{\sqrt{m_2}},$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i, \quad m_2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2,$$

распределение которых в случае нормального закона F было изучено Н. В. Смирновым [1]. Другой метод, предложенный Арлеем и Бухом [2,3], основан на использовании в качестве характеристик φ величин

$$\frac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{m_2}},$$

распределение которых в предположении нормальности F было изучено Томпсоном [4].

В работе [5] был предложен критерий для проверки гипотез о типе распределения, не требующий вычисления средних квадратических $\sqrt{m_2}$. Если $x_1' \leqslant x_2' \leqslant \ldots \leqslant x_n'$ — последовательность n независимых наблюдений случайной величины ξ, упорядоченная в порядке возрастания, то в качестве характеристик φ предлагается выбирать величины

$$\varphi_k = \frac{x_k' - x_1'}{x_n' - x_1'}, \quad (k = 2, \ldots, n-1)$$

способ вычисления функций распределения которых при произвольном законе F указывается.

В связи с предложенным критерием был проделан следующий опыт. Для $n = 5$ были вычислены теоретические функции распределения характеристик φ_2, φ_3, φ_4 в предположении нормальности закона F и в предположении равномерности закона F. Затем с помощью таблиц случайных чисел, подчиненных нормальному закону, было сделано 200 выборок объема 5 из заведомо нормальной совокупности и построены эмпирические функции распределения характеристик φ_2, φ_3, φ_4. Сравнение этих эмпирических распределений с теоретическими по критерию Колмогорова дало следующий результат. Во всех случаях эмпирические функции распределения хорошо согласуются с гипотезой нормального распределения. При сравнении с гипотезой равномерного распределения для характеристики φ_3 значимых отклонений не обнаружилось, а для характеристик φ_2 и φ_4 были получены значимые отклонения. Однако, несмотря на такое большое число (1000) наблюдений, эти отклонения оказались на границе обычно принимаемых уровней значимости (в первом случае отклонения соответствовали уровню значимости в 0,06%, а во втором — уровню значимости в 2%). Это показывает, что для различения с помощью указанного критерия по выборкам объема 5 даже таких «не похожих» друг на друга распределений, как нормальное и равномерное, требуется очень большое с практической точки зрения число наблюдений. Естественно возникает вопрос о возможности вообще по сравнительно небольшому числу малых выборок различать две статистические гипотезы относительно типа распределения. Настоящая работа и имела своей целью исследование возможности такого различения.

Задача о выборе между двумя конкурирующими гипотезами H_1 и H_2 решается в настоящей работе по следующей схеме, изложенной подробнее в § 2. От независимых случайных величин

$$x_1, \dots, x_n,$$

имеющих одно и то же распределение с плотностью $f(x)$, переходим к случайным величинам

$$y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S},$$

где

$$S^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2,$$

связанным соотношениями

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 1 \tag{0.2}$$

и обладающим тем свойством инвариантности, о котором говорилось выше. По заданной плотности вероятности $f(x)$ можно найти плотность вероятности $p(\eta)$ распределения случайного вектора

$$\eta = (y_1, \dots, y_n)$$

на $n-2$-мерной сфере, определяемой равенствами (0.2). Гипотеза H_1 заключается в том, что $f(x) = f_1(x)$, гипотеза H_2 — в том, что $f(x) = f_2(x)$. Вычисляются плотности $p_1(\eta)$ и $p_2(\eta)$, соответствующие этим двум случаям. Данные выборок (0.1) дают s наблюдений величины η. По этим наблюдениям производится выбор между предположением, что η имеет распределение с плотностью $p_1(\eta)$ (соответствующей гипотезе H_1) и предположением, что η имеет распределение с плотностью $p_2(\eta)$ (соответствующей гипотезе H_2). Выбор между этими двумя гипотезами производится с помощью статистического критерия, наиболее мощного в смысле различения гипотез H_1 и H_2.

В настоящей работе указывается способ оценки числа наблюдений, необходимых для различения двух гипотез о типе распределения, и выясняются трудности, связанные с задачей различения двух типов распределения по малым выборкам.

Пользуюсь случаем выразить свою сердечную признательность Андрею Николаевичу Колмогорову за постановку задачи и руководство при выполнении этой работы и Юрию Васильевичу Прохорову, беседы с которым существенно содействовали ее завершению.

§ 1. Задача выбора между двумя гипотезами

Гипотезой H_α мы будем называть предположение, что случайная величина* ξ имеет непрерывное распределение с плотностью вероятности $f_\alpha(x)$, соответствующей заданному значению параметра α.

* Случайная величина ξ предполагается, вообще говоря, n_0-мерной. При этом плотность вероятности $f_\alpha(x)$ является функцией n_0 действительных переменных $f_\alpha(x_1, \dots, x_{n_0})$, а пространство R возможных значений случайной величины ξ («выборочное пространство») n_0-мерным эвклидовым пространством R^{n_0}. Интегралы типа (1.1) понимаются в смысле n_0-мерных интегралов Лебега.

Обычный статистический критерий для проверки гипотезы H_α заключается в следующем. Фиксируется некоторое «критическое» множество K пространства R возможных значений случайной величины ξ, причем гипотеза H_α отвергается, если наблюденное значение x случайной величины ξ принадлежит множеству K, и считается согласующейся с опытом, если $x \in \overline{K}$. Такой критерий мы будем называть «критерием K».

При этом вероятность отвергнуть гипотезу H_α в том случае, когда она верна, равна

$$\varepsilon = \int_K f_\alpha(x)\, dx. \tag{1.1}$$

Эта вероятность (уровень значимости критерия) обычно фиксируется заранее.

Пусть нам надлежит сделать выбор между двумя конкурирующими гипотезами H_0 и H_α с помощью критерия H_0, установленного для проверки гипотезы H_0. Вероятность отвергнуть гипотезу H_0 в случае, когда она справедлива (вероятность «ошибки первого рода»), равна в соответствии с (1.1)

$$\varepsilon = \int_K f_0(x)\, dx \tag{1.2}$$

— выбранному уровню значимости критерия K.

Вероятность применять гипотезу H_0, в случае, когда справедлива гипотеза H_α (вероятность «ошибки второго рода»), равна

$$\omega = \int_{\overline{K}} f_\alpha(x)\, dx,$$

где $\overline{K}$ есть дополнение множества K до R, т. е. $R \setminus K$.

При выборе между двумя гипотезами H_0 и H_α при заданных ε и α естественно считать наиболее мощным такой критерий, для которого вероятность ошибки второго рода была бы наименьшей.

Будем предполагать, что плотности вероятностей $f_0(x)$ и $f_\alpha(x)$ не обращаются в нуль ни в одной точке пространства R. Функция

$$\gamma = \log \frac{f_\alpha(x)}{f_0(x)}$$

от точки выборочного пространства R является случайной величиной, распределение которой зависит от распределения величины ξ. В дальнейшем предполагается, что случайная величина γ имеет непрерывное распределение.

При заданных значениях ε и α наиболее мощным в смысле различения гипотез H_0 и H_α является такой критерий*, при котором в качестве критического множества выбирается множество $K = K_c$ всех точек $x \in R$, для которых $\gamma > c$, где c выбрано в соответствии с требованием (1.2). В силу определений величин ε и ω

* Этот критерий представляет собой логарифмический вариант известного оптимального критерия Неймана — Пирсона.

$$\varepsilon = \mathbf{P}(\gamma > c \mid H_0), \tag{1.3}$$

$$\omega = \mathbf{P}(\gamma < c \mid H_\alpha). * \tag{1.4}$$

Пусть мы имеем s независимых наблюдений

$$x_1, \ldots, x_s \tag{1.5}$$

случайной величины ξ. Составная случайная величина** $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_s)$ в предположении, что величины ξ_k независимы и имеют одно и то же распределение с плотностью вероятности p_α, имеет распределение с плотностью вероятности

$$\prod_{k=1}^{s} p_\alpha(x_k). \tag{1.6}$$

Предположение, что случайные величины ξ_k имеют распределения с плотностью вероятности p_α, будем называть гипотезой H_α. В силу независимости ξ_k можно сказать также, что гипотеза H_α заключается в том, что случайная величина $\bar{\xi}$ имеет распределение с плотностью вероятности (1.6). Поэтому к задаче проверки гипотезы H_α приложимо все сказанное выше. Пусть речь идет опять о выборе между двумя гипотезами H_0 и H_α. В нашем случае

$$\gamma = \sum_{k=1}^{s} \log \frac{p_\alpha(x_k)}{p_0(x_k)} = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k.$$

Мы предположили, что величины ξ_k независимы и имеют одно и то же распределение. Поэтому величины γ_k также независимы и имеют одно и то же распределение. Предположим, что случайная величина γ_k имеет конечный третий момент как в предположении справедливости гипотезы H_0, так и в предположении справедливости гипотезы H_α. Тогда к случайной величине γ применима теорема Ляпунова (см. [6] § 40). В силу этой теоремы

$$\mathbf{P}\left(\frac{\gamma - sa_0}{\sqrt{s}\,\sigma_0} < t \mid H_0\right) = \Phi(t) + \frac{\theta_0 \rho_0}{\sqrt{s}}, \tag{1.7}$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\gamma - sa_\alpha}{\sqrt{s}\,\sigma_\alpha} < t \mid H_\alpha\right) = \Phi(t) + \frac{\theta_\alpha \rho_\alpha}{\sqrt{s}}, \tag{1.8}$$

где θ_0 и θ_α ограничены некоторой абсолютной константой (меньшей 2),

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

и***

$$a_0 = \mathbf{M}(\gamma_k \mid H_0), \quad a_\alpha = \mathbf{M}(\gamma_k \mid H_\alpha), \tag{1.9}$$

---

* Символом $\mathbf{P}(A \mid H)$ обозначается вероятность события A в предположении справедливости гипотезы H.

** В случае, когда ξ_k являются n_0-мерными случайными величинами, случайная величина $\bar{\xi}$ является sn_0-мерной.

*** Символы $\mathbf{M}(\zeta \mid H)$ и $\mathbf{D}(\zeta \mid H)$ обозначают соответственно математическое ожидание и дисперсию случайной величины ζ в предположении справедливости гипотезы H. Напомним, что величины γ_k одинаково распределены и, следовательно, величины

$$\sigma_0^2 = \mathbf{D}(\gamma_k \mid H_0), \quad \sigma_\alpha^2 = \mathbf{D}(\gamma_k \mid H_\alpha), \tag{1.10}$$

$$\rho_0 = \frac{\mathbf{M}(|\gamma_k - a_0|^3 \mid H_0)}{\sigma_0^3}, \quad \rho_\alpha = \frac{\mathbf{M}(|\gamma_k - a_\alpha|^3 \mid H_\alpha)}{\sigma_\alpha^3}.$$

В силу (1.3—4) и (1.7—8)

$$\varepsilon = 1 - \Phi\left(\frac{c - sa_0}{\sqrt{s}\,\sigma_0}\right) - \frac{\theta_0 \rho_0}{\sqrt{s}}, \tag{1.11}$$

$$\omega = \Phi\left(\frac{c - sa_\alpha}{\sqrt{s}\,\sigma_\alpha}\right) + \frac{\theta_\alpha \rho_\alpha}{\sqrt{s}}. \tag{1.12}$$

В дальнейшем нас будет интересовать приближенная оценка числа наблюдений, необходимых для различения гипотез H_0 и H_α при заданных ε, ω и α. Обозначая t_z число, удовлетворяющее уравнению

$$1 - \Phi(t_z) = z,$$

в силу (1.11—12) будем иметь

$$t_\varepsilon \sim \frac{c - sa_0}{\sqrt{s}\,\sigma_0},$$

$$t_{1-\omega} = -t_\omega \sim \frac{c - sa_\alpha}{\sqrt{s}\,\sigma_\alpha}$$

и следовательно

$$c \sim sa_0 + t_\varepsilon \sqrt{s}\,\sigma_0,$$
$$c \sim sa_\alpha - t_\omega \sqrt{s}\,\sigma_\alpha.$$

Поэтому

$$t_\varepsilon \sigma_0 + t_\omega \sigma_\alpha \sim \sqrt{s}(a_\alpha - a_0)$$

или

$$s \sim \frac{(t_\varepsilon \sigma_0 + t_\omega \sigma_\alpha)^2}{(a_\alpha - a_0)^2}. \tag{1.13}$$

Выясним теперь точный смысл приближенной оценки числа s, даваемой соотношением (1.13). При фиксированных ε и α вероятность ошибки второго рода

$$\omega(s, \varepsilon, \alpha) = \mathbf{P}(\gamma < c \mid H_\alpha)$$

зависит от числа s. Нетрудно убедиться в том, что

$$\lim_{s \to \infty} \omega(s, \varepsilon, \alpha) = 0.$$

Определим число $s = s(\varepsilon, \omega, \alpha)$ как наименьшее целое число, для которого вероятность ошибки второго рода $\omega(s, \varepsilon, \alpha)$ не превосходит заданного числа ω. Тогда s представляет число наблюдений, необходимое для

1.9—10) не зависят от k. Например

$$a_0 = \int \log \frac{p_\alpha(x)}{p_0(x)} \cdot p_0(x)\, dx$$

и т. д., причем интегралы берутся по всему пространству.

Заметим, что

$$a_\alpha - a_0 = \int [p_\alpha(x) - p_0(x)] \log \frac{p_\alpha(x)}{p_0(x)}\, dx \geqslant 0.$$

Это обстоятельство существенно используется в дальнейшем.

различения гипотез H_0 и H_α с заданными вероятностями ошибок первого и второго рода ε и ω. Положим

$$s^* = s^*(\varepsilon, \omega, \alpha) = \frac{(t_\varepsilon \sigma_0 + t_\omega \sigma_\alpha)^2}{(a_\alpha - a_0)^2}.$$

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть при фиксированных* ε *и* ω *при* $\alpha \to 0$

$$s^*(\varepsilon, \omega, \alpha) \to \infty,$$

а величины ρ_0 *и* ρ_α *остаются ограниченными. Тогда при* $\alpha \to 0$

$$\frac{s(\varepsilon, \omega, \alpha)}{s^*(\varepsilon, \omega, \alpha)} \to 1.$$

Доказательство. В силу (1.11)

$$c = sa_0 + t_\varepsilon \sigma_0 (1 + \lambda),$$

где $\lambda = \lambda(\alpha, s) \to 0$ при $\alpha \to 0$, $s \to \infty$ и в силу (1.12)

$$\omega(s, \varepsilon, \alpha) = \Phi\left(\sqrt{s}\,\frac{a_0 - a_\alpha}{\sigma_\alpha} + t_\varepsilon \frac{\sigma_0}{\sigma_\alpha}(1 + \lambda)\right) + \frac{\theta_\alpha \rho_\alpha}{\sqrt{s}}.$$

Пусть ω — заданная допустимая вероятность ошибки второго рода. Возьмем произвольное (но достаточно малое) $\delta > 0$ и положим*

$$s' = \frac{(t_\varepsilon \sigma_0 (1 - \delta) - t_{\omega + \delta\sigma_\alpha})^2}{(a_\alpha - a_0)^2}, \quad \underline{s} = [s'],$$

$$s'' = \frac{(t_\varepsilon \sigma_0 (1 + \delta) + t_{\omega - \delta\sigma_\alpha})^2}{(a_\alpha - a_0)^2}, \quad \bar{s} = [s''] + 1.$$

При $\alpha \to 0$

$$\bar{s} \to \infty, \quad \underline{s} \to \infty,$$

а величины $\lambda(\alpha, \bar{s})$ и $\lambda(\alpha, \underline{s})$ зависят только от α и стремятся к нулю при $\alpha \to 0$. При числе наблюдений s равном $\bar{s}$ ошибка второго рода будет

$$\omega(\bar{s}, \varepsilon, \alpha) \leqslant \Phi\left(\sqrt{s''}\,\frac{a_0 - a_\alpha}{\sigma_\alpha} + t_\varepsilon \frac{\sigma_0}{\sigma_\alpha}(1 + \delta)\right) + \frac{\theta_\alpha \rho_\alpha}{\sqrt{\bar{s}}} =$$

$$= \omega - \delta + \frac{\theta_\alpha \rho_\alpha}{\sqrt{\bar{s}}} < \omega$$

при достаточно малых α. Следовательно, при достаточно малых α

$$s(\varepsilon, \omega, \alpha) \leqslant \bar{s}.$$

Аналогично доказывается, что при достаточно малых α

$$\underline{s} \leqslant s(\varepsilon, \omega, \alpha).$$

* В этих соотношениях $[h]$ означает целую часть h.

Из двух последних неравенств получаем

$$\min\left\{(1-\delta)^2,\ \frac{t_{\omega+\delta}^2}{t_\omega^2}\right\}-\frac{1}{s^*}\leqslant\frac{\bar{s}}{s^*}\leqslant\frac{s(\varepsilon,\omega,\alpha)}{s^*(\varepsilon,\omega,\alpha)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\bar{s}}{s^*}\leqslant\max\left\{(1+\delta)^2,\ \frac{t_{\omega-\delta}^2}{t_\omega^2}\right\}+\frac{1}{s^*}.$$

Следовательно

$$\min\left\{(1-\delta)^2,\ \frac{t_{\omega+\delta}^2}{t_\omega^2}\right\}\leqslant\varliminf_{\alpha\to 0}\frac{s}{s^*}\leqslant$$

$$\leqslant\varlimsup_{\alpha\to 0}\frac{s}{s^*}\leqslant\max\left\{(1+\delta)^2,\ \frac{t_{\omega-\delta}^2}{t_\omega^2}\right\}$$

и в силу произвольности δ

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{s}{s^*}$$

существует и равен единице.

§ 2. Переход к задаче проверки гипотезы о типе распределения

Пусть независимые случайные величины $x_1,\dots,x_n$ имеют одно и то же распределение с плотностью вероятности $f(x)$. Тогда n-мерный случайный вектор $\xi=(x_1,\dots,x_n)$ имеет в эвклидовом n-мерном пространстве R^n распределение с плотностью вероятности $f(x_1)\dots f(x_n)$. Рассмотрим случайные величины

$$y_i=\frac{x_i-\bar{x}}{S},\tag{2.1}$$

где *

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_k,\tag{2.2}$$

$$S^2=\sum(x_k-\bar{x})^2.\tag{2.3}$$

Величины y_i связаны соотношениями

$$\sum y_k=0,\quad\sum y_k^2=1.\tag{2.4}$$

Поэтому каждое наблюденное значение случайного вектора $\eta=(y_1,\dots,y_n)$ представляет собой точку $n-2$-мерной сферы $\mathfrak{S}$, определяемой равенствами (2.4). Выясним теперь распределение вероятностей величины η на сфере $\mathfrak{S}$, индуцированное отображением $\xi\to\eta(\xi)$, определяемым равенством (2.1). ** Найдем плотность вероятности этого распределения, т. е.

---

* В тех случаях, когда суммирование (или перемножение) проводится по k от 1 до n, указание на индекс при символе Σ (или Π) опускается.

** При переходе от величин $x_1,\dots,x_n$ к величинам $y_1,\dots,y_n$ приходится исключить из рассмотрения точки прямой $x_1=\dots=x_n$, для которых $S=0$ и соответствующие y_i не определены. Однако вероятность попадания на эту прямую в силу непрерывности распределения $x_1,\dots,x_n$ равна нулю, и поэтому исключение этой прямой не вызовет никаких осложнений в последующих рассуждениях.

такую неотрицательную функцию $p(\eta)$, для которой интеграл по сфере $\mathfrak{S}$

$$\int_{\mathfrak{S}} p(\eta)\, d\mathfrak{S} = 1 \tag{2.5}$$

равен единице, а интеграл по множеству $\mathfrak{S}_0 \subseteq \mathfrak{S}$

$$\int_{\mathfrak{S}_0} p(\eta)\, d\mathfrak{S} = \mathbf{P}(\eta \in \mathfrak{S}_0) \tag{2.6}$$

равен вероятности попадания η на множество $\mathfrak{S}_0$.

Введем в пространстве R^n новую систему координат

$$\bar{x},\ S,\ \varphi_1, \ldots,\ \varphi_{n-2},$$

где $\bar{x}$ и S определяются формулами (2.2—3), а $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}$ — какая-либо система координат на сфере $\mathfrak{S}$. В этой новой системе координат элемент вероятности имеет вид

$$f(x_1) \ldots f(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \Pi f(\bar{x} + Sy_k) \left| \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(\bar{x}, S, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})} \right| d\bar{x} dS d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2}. \tag{2.7}$$

Если обозначить $\mathfrak{S}_0^{\varphi}$ множество всех систем $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})$, для которых соответствующие точки сферы $\mathfrak{S}$ принадлежат множеству $\mathfrak{S}_0 \subseteq \mathfrak{S}$, то вероятность события $\eta \in \mathfrak{S}_0$ равна вероятности

$$\varphi \in \mathfrak{S}_0^{\varphi},\ 0 < S < \infty,\ -\infty < \bar{x} < \infty$$

и в силу (2.7)

$$\mathbf{P}(\eta \in \mathfrak{S}_0) = \int_{\mathfrak{S}_0^{\varphi}} d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2} \int_0^{\infty} dS \int_{-\infty}^{\infty} \Pi f(\bar{x} + Sy_k) \left| \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(x, S, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})} \right| d\bar{x}. \tag{2.8}$$

Перейдем теперь от переменных $x_1, \ldots, x_n$ к переменным $z_1, \ldots, z_n$ с помощью ортогонального преобразования, удовлетворяющего единственному дополнительному условию

$$z_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,\bar{x}.$$

(С геометрической точки зрения это такой поворот координатных осей $x_1, \ldots, x_n$, при котором новая ось z_n направлена по вектору, имеющему в старой системе координат координаты $1, \ldots, 1$). Сфера $\mathfrak{S}$ лежит в гиперплоскости L, определяемой в координатах $z_1, \ldots, z_n$ уравнением $z_n = 0$. Величины $z_1, \ldots, z_{n-1}$ определяют систему ортогональных координат в этой гиперплоскости. В той же гиперплоскости L положение точки может определяться координатами $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}$ ее проекции на сферу $\mathfrak{S}$ и ее расстоянием до начала координат, квадрат которого равен

$$\sum x_k^2 = \sum z_k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} z_k^2 = S^2.$$

Поэтому величины $S, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}$ также определяют систему координат гиперплоскости L — их задание однозначно определяет величины $z_1, \ldots, z_{n-1}$:

$$z_1 = z_1(S, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z_{n-1} = z_{n-1}(S, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})$$

причем z_i зависят от S линейно. Нетрудно убедиться в том, что

$$\left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(\bar{x}, S, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})}\right| = \left|\frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(\bar{x}, S, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})}\right| = \sqrt{n}\left|\frac{\partial(z_1, \ldots, z_{n-1})}{\partial(S, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})}\right|. \quad (2.9)$$

Положим

$$J(S, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}) = \left|\frac{\partial(z_1, \ldots, z_{n-1})}{\partial(S, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})}\right|. \quad (2.10)$$

Элемент объема в системе координат $S, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}$ на гиперплоскости L имеет вид

$$J(S, \varphi_1 \ldots \varphi_{n-2})\, dS d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2}.$$

Так как z_i линейно зависят от S, то

$$J(S, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}) = S^{n-2} J(1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}).$$

Поэтому

$$J(S, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})\, dS\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2} =$$
$$= S^{n-2} J(1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})\, dS d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2} \quad (2.11)$$

т. е., следовательно, элемент поверхности сферы радиуса S, лежащей в гиперплоскости L, с центром в начале координат имеет вид

$$S^{n-2} J(1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2}$$

т. е., в частности, элемент поверхности единичной сферы $\mathfrak{S}$ равен

$$d\mathfrak{S} = J(1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2}. \quad (2.12)$$

В силу (2.8—11)

$$\mathbf{P}(\eta \in \mathfrak{S}_0) = \int_{\mathfrak{S}_0^{\varphi}} p(\eta) J(1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-2}, \quad (2.13)$$

где

$$p(\eta_i) = p(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}) = \sqrt{n}\int_0^{\infty} dS \int_{-\infty}^{\infty} S^{n-2} \Pi f(\bar{x} + Sy_k) d\bar{x}. \quad (2.14)$$

В силу (2.12—13)

$$\mathbf{P}(\eta \in \mathfrak{S}_0) = \int_{\mathfrak{S}_0^{\varphi}} p(\eta)\, d\mathfrak{S}.$$

Поэтому функция $p(\eta_i)$ точки на сфере $\mathfrak{S}$ удовлетворяет требованиям (2.5—6) и, следовательно, является плотностью вероятности распределения величины η на сфере $\mathfrak{S}$.

Вычислим плотность $p(\eta_l) = p_0(\eta_l)$ для случая, когда распределени величин x_i нормально, т. е. когда

$$f(x) = f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{2.15}$$

В этом случае

$$\prod f(\bar{x} + Sy_k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\Sigma(\bar{x}+Sy_k)^2}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{n\bar{x}^2+S^2}{2}}.$$

Поэтому

$$p_0(\eta_l) = \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^\infty S^{n-2} e^{-\frac{n\bar{x}^2+S^2}{2}} d\bar{x} = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2(\sqrt{\pi})^{n-1}},$$

т. е. в этом случае изучаемое распределение на сфере $\mathfrak{S}$ является рав номерным, и плотность его вероятности есть константа

$$p_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2(\sqrt{\pi})^{n-1}}. \tag{2.16}$$

Рассмотрим теперь случай, когда

$$f(x) = f_\alpha(x) = f_0(x)[1 + \alpha H(x) + K(x,\alpha)], \tag{2.17}$$

где $f_0(x)$ определяется равенством (2.15), $H(x)$ — полином, а относитель но остаточного члена $R(x, \alpha)$ предполагается, что для всех x

$$|R(x,\alpha)| \leqslant \alpha^2 \overline{R}(x), \tag{2.18}$$

где $\overline{R}(x)$ — некоторый неотрицательный на всей числовой прямой полином.

Докажем, что в этом случае

$$p(\eta) = p_\alpha(\eta) = \tag{2.19}$$

$$= p_0 + \alpha\sqrt{n} \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^\infty S^{n-2} \sum H(\bar{x} + Sy_k) \prod f_0(\bar{x} + Sy_k)\, dx + O(\alpha^2)$$

равномерно относительно $y_1, \ldots, y_n$*.

Действительно, в рассматриваемом случае

$$\Pi f_\alpha(\bar{x} + Sy_k) = \Pi_1 \Pi_2, \tag{2.20}$$

где

$$\Pi_1 = \Pi f_0(\bar{x} + Sy_k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\Sigma(\bar{x}+Sy_k)^2}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{n\bar{x}^2+S^2}{2}} \tag{2.21}$$

и

$$\Pi_2 = \Pi[1 + \alpha H(\bar{x} + Sy_k) + R(\bar{x} + Sy_k, \alpha)].$$

---

* Нетрудно убедиться в том, что формула (2.19) справедлива и при менее сильных ограничениях, налагаемых на f_0, H и R (конечно, с той естественной оговоркой, что если f_0 не определяется равенством (2.15), то в выражении (2.19) p_0 не есть константа (2.16), а есть функция от $y_1, \ldots, y_n$, определяемая в соответствии с (2.14)). Однако для наших дальнейших целей (см. §§ 4 и 5) ограничения, введенные в основном тексте, не являются стеснительными.

Положим для краткости

$$H_k = H(\bar{x} + Sy_k),$$
$$R_k = R(\bar{x} + Sy_k, \alpha),\ k = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\Pi_2 = \Pi(1 + \alpha H_k + R_k) = 1 + \alpha \sum H_k + \tilde{R}, \tag{2.22}$$

где $\tilde{R}$ состоит из конечного числа слагаемых вида

$$\alpha^p H_{i_1} \ldots H_{i_p} R_{j_1} \ldots R_{j_q}, \tag{2.23}$$

где $p = 0,1,\ldots,n$; $q = 0,1,\ldots,n$, а $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots j_q$ — все различны могут принимать всевозможные целые значения от 1 до n, $p + q \leqslant n$, $+ 2q \geqslant 2$. В силу (2.14), (2.20—22)

$$p_\alpha(\eta) = \sqrt{n} \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^\infty S^{n-2}(1 + \alpha \sum H_k + \tilde{R}) \Pi_1 d\bar{x} =$$

$$= p_0 + \alpha \sqrt{n} \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^\infty S^{n-2} \sum H(\bar{x} + Sy_k) \Pi f_0(\bar{x} + Sy_k)\, d\bar{x} +$$

$$+ \sqrt{n} \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^\infty S^{n-2} \tilde{R} \Pi_1 d\bar{x}.$$

Для доказательства (2.19) остается показать, что

$$R^* = \sqrt{n} \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^\infty S^{n-2} \tilde{R}\ \Pi_1 d\bar{x} =$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^\infty S^{n-2} \tilde{R} e^{-\frac{n\bar{x}^2 + S^2}{2}} d\bar{x} = O(\alpha^2) \tag{2.24}$$

равномерно относительно y_i при фиксированном n.

Так как $\tilde{R}$ состоит из слагаемых вида (2.23), то R^* разбивается на сумму конечного числа интегралов вида

$$I = C \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^\infty S^{n-2} \alpha^p H_{i_1} \ldots H_{i_p} R_{j_1} \ldots R_{j_q} e^{-\frac{n\bar{x}^2 + S^2}{2}} d\bar{x},$$

где $C = \dfrac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2\pi})^n} > 0$ при фиксированном n есть константа. Покажем, что каждый из этих интегралов есть $O(\alpha^2)$.

В силу (2.18)

$$|I| \leqslant |\alpha|^{p+2q} C \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^\infty S^{n-2} \prod_{k=1}^{p} |H(\bar{x} + Sy_{i_k})| \prod_{k=1}^{q} \overline{R}(\bar{x} + Sy_{j_k})\, e^{-\frac{n\bar{x}^2 + S^2}{2}} d\bar{x} =$$

$$= |\alpha|^{p+2q} C \bar{I}.$$

Так как $p + 2q \geqslant 2$, то для доказательства (2.24) достаточно показать, что

$$\bar{I} = \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^\infty S^{n-2} \prod_{k=1}^{p} |H(\bar{x} + Sy_{i_k})| \prod_{k=1}^{q} \overline{R}(\bar{x} + Sy_{j_k})\, e^{-\frac{n\bar{x}^2 + S^2}{2}} d\bar{x} \leqslant \overline{K},$$

где $\overline{K}$ есть константа, не зависящая от $y_1, \ldots, y_n$. Подберем такой неотрицательный на всей числовой прямой многочлен $P(x)$, что при любом x

$$P(x) \geqslant |H(x)|, \; P(x) \geqslant \overline{R}(x), \; P(x) \geqslant 1.$$

Тогда

$$\overline{I} \leqslant \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^{\infty} S^{n-2} \prod \Big[P(\overline{x} + Sy_k) e^{-\frac{(\overline{x}+Sy_k)^2}{2}} \Big] d\overline{x}.$$

Так как для любого полинома

$$|P(x) e^{-\frac{x^2}{2}}| \leqslant K_1 e^{-\frac{x^2}{4}},$$

где K_1 не зависит от x, то

$$\overline{I} \leqslant K_1^n \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^{\infty} S^{n-2} e^{-\frac{S^2}{4}} e^{-\frac{n\overline{x}^2}{4}} d\overline{x} = K_1^n 2^{n-2} \sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \overline{K},$$

чем доказательство (2.19) и завершается.

Пусть теперь $\eta_1, \ldots, \eta_s$ — s независимых наблюдений случайной величины η. Надлежит сделать выбор между двумя гипотезами: η имеет распределение с плотностью вероятности $p_0(\eta)$ (гипотеза H_0) и η имеет распределение с плотностью вероятности $p_\alpha(\eta)$ (гипотеза H_α). К решению этой задачи применимы методы, описанные в § 1*. В этом случае величины (1.9—10) определяются интегралами по $n-2$-мерной сфере $\mathfrak{S}$, скажем,

$$a_0 = \int_{\mathfrak{S}} p_0(\eta) \log \frac{p_\alpha(\eta)}{p_0(\eta)} d\mathfrak{S}$$

и т. д. В случае, когда f_0 определяется равенством (2.15), выражение (2.19) может быть записано в виде

$$p_\alpha(\eta) = p_0[1 + u(\eta)\alpha + O(\alpha^2)], \tag{2.25}$$

где

$$u(\eta) = b \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^{\infty} S^{n-2} e^{-\frac{n\overline{x}^2+S^2}{2}} \sum H(\overline{x} + Sy_k) d\overline{x},$$

$$b = \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2})^{n-2} \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Тогда

$$\gamma = \log \frac{p_\alpha}{p_0} = \log[1 + \alpha u + O(\alpha^2)] = \alpha u + O(\alpha^2).$$

Обозначая**

$$\theta^2 = \int_{\mathfrak{S}} u^2(\eta) d\mathfrak{S},$$

---

* Заметим, что плотности вероятности (2.16) и (2.19) не обращаются в нуль ни в одной точке сферы $\mathfrak{S}$.

** Заметим, что θ^2 зависит, конечно, от n.

удем иметь

$$a_0 = \int_{\mathfrak{S}} \gamma p_0 d\mathfrak{S} = \int_{\mathfrak{S}} [\alpha u + O(\alpha^2)]\, p_0 d\mathfrak{S},$$

$$a_\alpha = \int_{\mathfrak{S}} \gamma p_\alpha d\mathfrak{S} = \int_{\mathfrak{S}} [\alpha u + O(\alpha^2)]\, p_\alpha d\mathfrak{S},$$

$$a_\alpha - a_0 = \int_{\mathfrak{S}} [\alpha u + O(\alpha^2)]\, (p_\alpha - p_0)\, d\mathfrak{S} =$$

$$= \int_{\mathfrak{S}} [\alpha u + O(\alpha^2)]\, [\alpha u + O(\alpha^2)]\, p_0 d\mathfrak{S} = \alpha^2\theta^2 + O(\alpha^3).$$

Легко убедится в том, что*

$$\int_{\mathfrak{S}} u p_0 d\mathfrak{S} = 0.$$

Поэтому

$$a_0^2 = O(\alpha^4),\ a_\alpha^2 = O(\alpha^4)$$

и

$$\sigma_0^2 = \int_{\mathfrak{S}} \gamma^2 p_0 d\mathfrak{S} + O(\alpha^4) = \int_{\mathfrak{S}} [\alpha u + O(\alpha^2)]^2\, p_0 d\mathfrak{S} + O(\alpha^4) = \alpha^2\theta^2 + O(\alpha^3),$$

$$\sigma_\alpha^2 = \int_{\mathfrak{S}} \gamma^2 p_\alpha d\mathfrak{S} + O(\alpha^4) = \int_{\mathfrak{S}} [\alpha u + O(\alpha^2)]^2\, [1 + \alpha u + O(\alpha^2)]\, p_0 d\mathfrak{S} + O(\alpha^4) =$$

$$= \alpha^2\theta^2 + O(\alpha^3)$$

и, пренебрегая членами порядка $O(\alpha^3)$, получаем в силу (1.13)

$$s \sim \frac{(t_\varepsilon + t_\omega)^2}{\alpha^2\theta^2} \tag{2.26}$$

число наблюдений случайной величины η, необходимое для различения гипотез H_0 и H_α с заданными вероятностями ε и ω. Полагая

$$c_n = \frac{n}{\theta^2}, \tag{2.27}$$

можно записать (2.26) в виде

$$s \sim \frac{(t_\varepsilon + t_\omega)^2 c_n}{\alpha^2 n}. \tag{2.28}$$

---

* Действительно,

$$\int_{\mathfrak{S}} p_\alpha d\mathfrak{S} = \int_{\mathfrak{S}} p_0 d\mathfrak{S} + \alpha \int_{\mathfrak{S}} u p_0 d\mathfrak{S} + O(\alpha^2),$$

$$\int_{\mathfrak{S}} p_\alpha d\mathfrak{S} = \int_{\mathfrak{S}} p_0 d\mathfrak{S} = 1,$$

откуда

$$\int_{\mathfrak{S}} u p_0 d\mathfrak{S} = O(\alpha).$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$, получаем

$$\int_{\mathfrak{S}} u p_0 d\mathfrak{S} = 0.$$

В последнем соотношении знак $\sim$ означает, что отношение левой части к правой стремится к единице при $\alpha \to 0$.

§ 3. Один пример

В качестве иллюстрации использования формулы (1.13) для оценки числа наблюдений, необходимых для различения двух гипотез, рассмотрим задачу различения нормального и равномерного типов распределения по выборкам объема $n = 3$.

Пусть независимые случайные величины x_1, x_2, x_3 имеют одно и то же распределение с плотностью вероятности $f(x)$. Случайные величины

$$y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}; \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad S^2 = \sum_{i=1}^{3} (x_i - \bar{x})^2,$$

подчинены условиям

$$\sum_{i=1}^{3} y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} y_i^2 = 1.$$

Следовательно, каждое наблюденное значение случайного вектора $\eta = (y_1, y_2, y_3)$ является точкой трехмерного пространства, расположенной на окружности единичного радиуса, лежащей в плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к вектору $(1, 1, 1)$. Повернем координатные оси так, чтобы новая ось z_3 была направлена по вектору $(1, 1, 1)$, а ось z_2 лежала в плоскости, проходящей через оси y_3 и z_3. Тогда старые координаты y_1, y_2, y_3 вектора η выразятся через новые z_1, z_2, z_3 следующим образом

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_3,$$

$$y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_3,$$

$$y_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_3.$$

Пусть φ есть угол между вектором η и осью z_1. Тогда положение вектора η определяется углом φ и

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\varphi \\ y_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\varphi \\ y_3 &= -\frac{2}{\sqrt{6}} \sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Найдем теперь плотность вероятности распределения случайной величины φ. Рассмотрим элемент вероятности

$$f(x_1) f(x_2) f(x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3$$

перейдем от переменных x_1, x_2, x_3 к переменным $\bar{x}$, S, φ. Нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\varrho(\bar{x}, S, \varphi)} = \sqrt{3}\,S$$

и, следовательно,

$$f(x_1) f(x_2) f(x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3 = \sqrt{3}\, f(\bar{x} + Sy_1) f(\bar{x} + Sy_2) f(\bar{x} + Sy_3)\, S d\varphi d\bar{x} dS,$$

где y_1, y_2, y_3 определяются формулами (3.1). Поэтому плотность вероятности распределения φ равна

$$p(\varphi) = p(y_1, y_2, y_3) = \sqrt{3} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x} \int_0^{\infty} S f(\bar{x} + Sy_1) f(\bar{x} + Sy_2) f(\bar{x} + Sy_3)\, dS\,.$$

Для равномерного распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{при } x \in [0, 1] \end{cases}$$

получаем

$$p(\varphi) = p_1(\varphi) = \sqrt{3} \iint_D S d\bar{x} dS,$$

где D есть область, определяемая неравенствами $S \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \bar{x} + Sy_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \bar{x} + Sy_2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \bar{x} + Sy_3 \leqslant 1.$$

Обозначим

$$m = \min\{y_1, y_2, y_3\}, \quad M = \max\{y_1, y_2, y_3\}$$

(m и M являются, конечно, функциями от φ). Тогда

$$p_1(\varphi) = \sqrt{3} \int_0^{\frac{1}{M-m}} dS \int_{-Sm}^{1-SM} S d\bar{x} = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{1}{(M-m)^2}$$

и, значит,

$$p_1(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{12\cos^2\varphi} \text{ при } 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ \dfrac{\sqrt{3}}{12\cos^2\left(\varphi - \dfrac{\pi}{3}\right)} \text{ при } \dfrac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3\pi}{2}, \\ \dfrac{\sqrt{3}}{12\cos^2\left(\varphi - \dfrac{2\pi}{3}\right)} \text{ при } \dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{11\pi}{6}. \end{cases}$$

Для нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

получаем

$$p(\varphi) = p_0(\varphi) = \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_0^{\infty} dS \int_{-\infty}^{\infty} S e^{-\frac{S^2 + 3\bar{x}^2}{2}}\, d\bar{x} = \frac{1}{2\pi}\,.$$

Графики функций $p_1(\varphi)$ и $p_0(\varphi)$ в полярных координатах представлены на рис. 1.

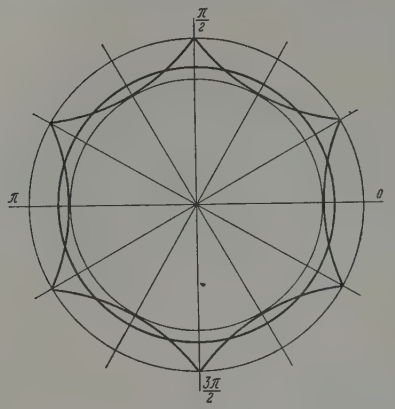


Рис. 1

Для законов распределения $p_0(\varphi)$ и $p_1(\varphi)$ случайного угла φ вычисляем величины

$$a_0 = \int_0^{2\pi} \log \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\, p_0(x)\, dx,$$

$$a_1 = \int_0^{2\pi} \log \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\, p_1(x)\, dx,$$

$$\sigma_0^2 = \int_0^{2\pi} \log^2 \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\, p_0(x)\, dx - a_0^2,$$

$$\sigma_1^2 = \int_0^{2\pi} \log^2 \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\, p_1(x)\, dx - a_1^2.$$

Второй из этих интегралов берется в элементарных функциях, остальные приводятся к интегралам

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \log\cos\varphi\, d\varphi,\quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \log^2\cos\varphi\, d\varphi,\quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\log^2\cos\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \log^2(1+z^2)\, dz,$$

вычисление которых с помощью разложения подинтегральных функций в ряды и почленного интегрирования дает

$$a_0 = -0.003692,\quad a_1 = 0{,}003758,$$

$$\sigma_0^2 = 0{,}007251,\quad \sigma_1^2 = 0{,}007642.$$

В соответствии с (1.13) число s выборок объема $n = 3$, необходимое для различения нормального и равномерного законов при заданных вероятностях ошибок первого и второго рода ε и ω, приближенно равно*

$$\frac{(t_\varepsilon\sigma_0 + t_\omega\sigma_1)^2}{(a_1 - a_0)^2}. \qquad (3.$$

* Законность применения приближенного равенства (1.13) в нашем случае обуславливается тем, что для принимаемых обычно (не слишком малых) значений ε и ω и для больших значений s точность приближенных равенств

$$\varepsilon \sim 1 - \Phi\left(\frac{c - sa_0}{\sqrt{s}\,\sigma_0}\right),$$

$$\omega \sim \Phi\left(\frac{c - sa_1}{\sqrt{s}\,\sigma_1}\right)$$

весьма велика.

Значения величины (3.2) приведены в табл. 1, причем погрешность при вычислении величины (3.2) не превосходит 7 единиц.

Таблица 1

ω / ■	0,05	0,01	0,001
0,05	1452	2125	3032
0,01	2106	2904	3950
0,001	2983	3921	5124

Итак, для различения нормального и равномерного законов распределения с вероятностями ошибок первого и второго рода, равными 0,05, потребовалось бы более 1400 троек наблюдений, а с вероятностями ошибок первого и второго рода, равными 0,001, потребовались бы более 5000 троек наблюдений.

§ 4. Различение нормального типа и близкого к нему типа с асимметрией

Рассмотрим случай, когда в (2.17)

$$H(x) = x^3 - 3x$$

— третий полином Эрмита. Тогда

$$\sum H(\bar{x} + Sy_k) = \sum[(\bar{x} + Sy_k)^3 - 3(\bar{x} + Sy_k)]$$

и в силу (2.4)

$$\sum H(\bar{x} + Sy_k) = S^3 \sum y_k^3 + 3S^2\bar{x} + n\bar{x}^3 - 3n\bar{x}.$$

Поэтому в нашем случае в соотношении (2.25)

$$u(\eta) = b \int_0^\infty dS \int_{-\infty}^\infty S^{n-2} e^{-\frac{n\bar{x}^2+S^2}{2}} \left(S^3 \sum y_k^3 + 3S^2\bar{x} + n\bar{x}^3 - 3n\bar{x}\right) d\bar{x},$$

причем вычисление последнего двойного интеграла дает

$$u(\eta) = b_0 \sum y_k^3,$$

где

$$b_0 = \frac{(\sqrt{2})^3 \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

и величина θ определяется соотношением

$$\theta^2 = b_0^2 \int_{\mathfrak{S}} \left(\sum y_k^3\right)^2 p_0 d\mathfrak{S}.$$

Так как

$$\sum y_k^3 = \frac{a}{\sqrt{n}},$$

где

$$a = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3},$$

$$m_i = \frac{1}{n}\sum (x_k - \bar{x})^i,$$

то

$$\theta^2 = \frac{b_0^2}{n}\int_{\mathfrak{S}} a^2 p_0 d\mathfrak{S}.$$

Как известно (см. [7], стр. 422) при нормальном распределении величин x_i математическое ожидание

$$\mathrm{M}a = 0,$$

а дисперсия

$$\mathrm{D}a = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}.$$

Поэтому

$$\theta^2 = \frac{b_0^2 \mathrm{D}a}{n}$$

и по определению (2.27) величина c_n равна в нашем случае

$$c_n = \frac{n}{\theta^2} = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}\right]^2 \frac{n^2(n+1)(n+3)}{48(n-2)},$$

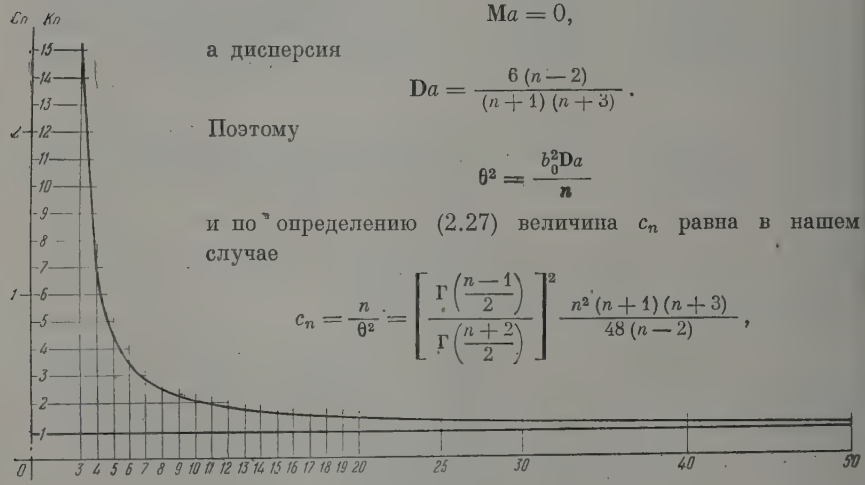


Рис. 2

а предельное значение c_n равно

$$c_\infty = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{6}.$$

Значения c_n и $k_n = \frac{c_n}{c_\infty}$ приведены в табл. 2, помещенной в конце § 5.

Поведение c_n с ростом n проиллюстрировано на рис. 2.

В силу (2.28) число наблюдений $N = sn$, необходимое для различения гипотез H_0 и H_α по выборкам объема n, определяется соотношением

$$N \sim \frac{(t_\varepsilon + t_\omega)^2 c_n}{\alpha^2}. \qquad (4.1)$$

Из приведенных в табл. 2 данных видно, что число наблюдений, необходимых для различения гипотез H_0 и H_α с заданными вероятностями ε и ω, растет с уменьшением объема выборки. Так, скажем, при $n = 5$ для указанной цели потребовалось бы в $\frac{c_5}{c_{10}} = 2{,}2$ раза больше на-

людений, чем при $n = 10$, и в $\frac{c_5}{c_{50}} \approx 3{,}9$ раза больше наблюдений, чем при $n = 50$.

5. Различие нормального типа и близкого к нему типа с эксцессом

Рассмотрим случай, когда в (2.17)

$$H(x) = x^4 - 6x^2 + 3$$

— четвертый полином Эрмита. Тогда

$$\sum H(\bar{x} + Sy_k) = \sum [(\bar{x} + Sy_k)^4 - 6(\bar{x} + Sy_k)^2 + 3] =$$

$$= S^4 \sum y_k^4 + 4S^3\bar{x} \sum y_k^3 + 6S\bar{x}^2 + n\bar{x}^4 - 6S^2 - 6n\bar{x}^2 + 3n.$$

Поэтому в нашем случае в соотношении (2.25)

$$u(\eta) = b \int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty S^{n-2} e^{-\frac{n\bar{x}^2 + S^2}{2}} \left[S^4 \sum y_k^4 + 4S^3\bar{x} \sum y_k^3 + \right.$$

$$\left. + 6S^2\bar{x}^2 + n\bar{x}^4 - 6S^2 - 6n\bar{x}^2 + 3n \right] d\bar{x}.$$

Вычисляя последний интеграл, находим, что в разбираемом случае

$$u(\eta) = (n^2 - 1) \sum y_k^4 - 3 \frac{(n-1)^2}{n},$$

а величина θ^2 определяется соотношением

$$\theta^2 = (n^2 - 1)^2 \int_{\mathfrak{S}} \left(\sum y_k^4 \right)^2 p_0 d\mathfrak{S} - 6 \frac{(n+1)(n-1)^3}{n} \int_{\mathfrak{S}} \sum y_k^4 \, p_0 d\mathfrak{S} + 9 \frac{(n-1)^4}{n^2}.$$

Так как

$$\sum y_k^4 = \frac{1}{n} \frac{m_4}{m_2^2},$$

то интегралы, входящие в выражение для θ^2, равны математическим ожиданиям

$$\mathbf{M} \left(\sum y_k^4 \right)^2 = \frac{1}{n^2} \mathbf{M} \left(\frac{m_4}{m_2^2} \right)^2,$$

$$\mathbf{M} \left(\sum y_k^4 \right) = \frac{1}{n} \mathbf{M} \left(\frac{m_4}{m_2^2} \right)$$

в предположении нормальности распределений x_i. Эти математические ожидания нетрудно найти, пользуясь известными выражениями математического ожидания и дисперсии коэффициента эксцесса для случая нормального распределения (см. [7], стр. 422). Они оказываются равными

$$\mathbf{M} \left(\frac{m_4}{m_2^2} \right) = \frac{3(n-1)}{n+1},$$

$$\mathbf{M} \left(\frac{m_4}{m_2^2} \right)^2 = \mathbf{D} \left(\frac{m_4}{m_2^2} \right) + \left[\mathbf{M} \left(\frac{m_4}{m_2^2} \right) \right]^2 = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)} + \frac{9(n-1)^2}{(n+1)^2}.$$

Поэтому

$$\theta^2 = \frac{24(n-1)^2(n-2)(n-3)}{n(n+3)(n+5)}$$

и, значит,

$$c_n = \frac{n}{\theta^2} = \frac{n^2(n+3)(n+5)}{24(n-1)^2(n-2)(n-3)}.$$

Предельное значение c_n равно

$$c_\infty = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{24}.$$

Значения c_n и $k_n = \frac{c_n}{c_\infty}$ приведены в табл. 2. Поведение c_n с ростом n проиллюстрировано на рис. 3.

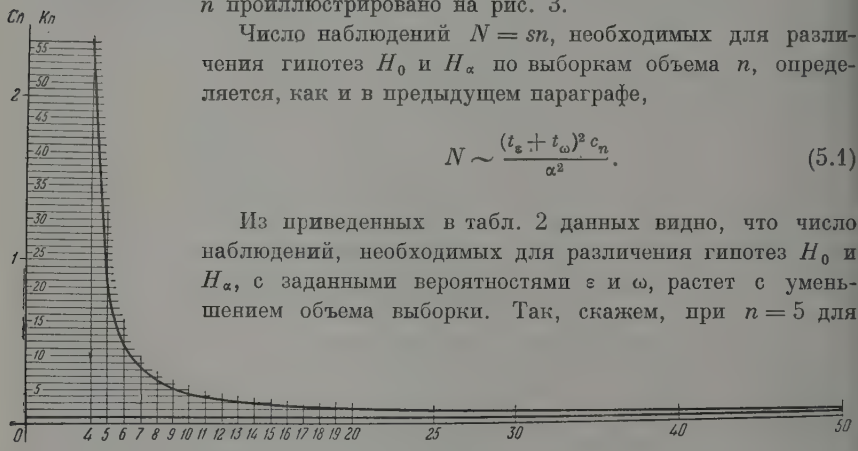


Рис. 3

Число наблюдений $N = sn$, необходимых для различения гипотез H_0 и H_α по выборкам объема n, определяется, как и в предыдущем параграфе,

$$N \sim \frac{(t_\varepsilon + t_\omega)^2 c_n}{\alpha^2}. \tag{5.1}$$

Из приведенных в табл. 2 данных видно, что число наблюдений, необходимых для различения гипотез H_0 и H_α, с заданными вероятностями ε и ω, растет с уменьшением объема выборки. Так, скажем, при $n = 5$ для указанной цели потребовалось бы в $\frac{c_5}{c_{10}} \approx 4{,}8$ раза больше наблюдений, чем при $n = 10$; и в $\frac{c_5}{c_{10}} \approx 15{,}5$ раза больше наблюдений, чем при $n = 50$.

§ 6. Замечание относительно интерпретации числа k_n

В заключение укажем на следующее истолкование числа k_n. Пусть по данным одной выборки

$$x_1, \ldots, x_{\widetilde{N}} \tag{6.1}$$

мы хотим различить две гипотезы:

($\widetilde{H}_0$) выборка (6.1) представляет собой совокупность $\widetilde{N}$ независимых наблюдений случайной величины ξ, имеющей распределение с плотностью вероятности $f_0(x)$, и

($\widetilde{H}_\alpha$) выборка (6.1) представляет собой совокупность $\widetilde{N}$ наблюдений величины ξ, имеющей распределение с плотностью $f_\alpha(x)$, определяемой равенством (2.17).

Таблица 2

n	Случай асимметрии		Случай эксцесса	
	c_n	k_n	c_n	k_n
3	2,5467	15,280	—	—
4	1,1454	6,872	2,33333	56*
5	0,7545	4,527	0,86806	20,833
6	0,5798	3,479	0,495*	11,88*
7	0,4829	2,897	0,34028	8,167
8	0,4219	2,531	0,25941	6,226
9	0,3801	2,281	0,21094	5,063
10	0,3499	2,099	0,17912	4,299
11	0,3270	1,962	0,15685	3,764
12	0,3092	1,855	0,14050	3,372
13	0,2948	1,769	0,12803	3,073
14	0,2831	1,699	0,11825	2,838
15	0,2733	1,640	0,11038	2,649
16	0,2650	1,590	0,10393	2,494
17	0,2579	1,547	0,09873	2,370
18	0,2518	1,511	0,09401	2,256
19	0,2464	1,478	0,09012	2,163
20	0,2417	1,450	0,08675	2,082
25	0,2244	1,346	0,07505	1,801
30	0,2136	1,282	0,06812	1,635
40	0,2008	1,205	0,06032	1,448
50	0,1935	1,161	0,05606	1,345
∞	0,1667	1*	0,04167	1*

* Отмеченные значения являются точными.

Определим число $\widetilde{N}$ наблюдений, необходимое для различения гипотез $\widetilde{H}_0$ и $\widetilde{H}_\alpha$ с заданными вероятностями ошибок первого и второго рода. В соответствии с общей теорией, изложенной в § 1, это число определяется соотношением

$$\widetilde{N} \sim \frac{(t_\varepsilon \sigma_0 + t_\omega \sigma_\alpha)^2}{(a_\alpha - a_0)^2}, \tag{6.2}$$

где a_0, σ_0^2, a_α, σ_α^2 — математические ожидания и дисперсии случайной величины

$$\widetilde{\gamma} = \log \frac{f_\alpha(x)}{f_0(x)},$$

вычисленные, соответственно, в предположениях справедливости гипотезы $\widetilde{H}_0$ и гипотезы $\widetilde{H}_\alpha$. При некоторых дополнительных предположениях относительно плотностей * $f_0(x)$ и $f_\alpha(x)$ нетрудно было бы показать, что

$$a_\alpha - a_0 = \alpha^2 \widetilde{\theta}^2 + O(\alpha^3), \qquad \sigma_0^2 = \alpha^2 \widetilde{\theta}^2 + O(\alpha^3), \quad \alpha_\alpha^2 = \alpha^2 \widetilde{\theta}^2 + O(\alpha^3),$$

где

$$\widetilde{\theta}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} H^2(x) f_0(x)\, dx.$$

* Например, при предположении, что

$$\frac{f_\alpha(x)}{f_0(x)} \geqslant \delta > 0.$$

Поэтому, пренебрегая членами порядка $O(\alpha^3)$, в силу (6.2) имеем

$$\widetilde{N} \sim \frac{(t_\varepsilon + t_\omega)^2}{\alpha^2 \widetilde{v}^2}.$$

Для случаев, разобранных в §§ 4—5, величины $\widetilde{v}^2$ легко вычислить. В случае асимметрии $\widetilde{v}^2 = 6$, в случае эксцесса $\widetilde{v}^2 = 24$. Следовательно, в обоих случаях

$$\widetilde{v}^2 = \frac{1}{c_\infty},$$

$$\widetilde{N} \sim \frac{(t_\varepsilon + t_\omega)^2 c_\infty}{\alpha^2}$$

и в силу (4.1) и (5.1) число $N = sn$ наблюдений, необходимых для различия гипотез H_0 и H_α с теми же вероятностями ε и ω, связано с числом $\widetilde{N}$ соотношением

$$N = k_n \widetilde{N}.$$

Поэтому для различения гипотез H_0 и H_α по выборкам объема n нужно в k_n раз больше наблюдений, чем при различии гипотез $\widetilde{H}_0$ в $\widetilde{H}_\alpha$ по данным одной выборки при тех же вероятностях ошибок первого и второго рода.

Поступила в редакцию
27.6.56

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Смирнов, Об оценке максимального члена в ряду наблюдений, ДАН СССР, **33** (1941), 346—349.
[2] N. Arley, On the distribution of relative errors from a normal population of errors, K. Danske Vid. Selsk., Mat.-fys. Medd. **18**, No. 3 (1940).
[3] Арлей и Бух, Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, ИИЛ, Москва, 1951.
[4] W. R. Thompson, On a criterion for the rejection of observations and the distribution of the ratio of deviation to sample standard deviation, Ann. Math. Statistics, **6** (1935), 214.
[5] А. А. Петров, Проверка гипотезы о нормальности распределений по малым выборкам, ДАН СССР, **76** (1951), 355—358.
[6] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, ГИТТЛ, 1949.
[7] Г. Крамер, Математические методы статистики, ГИИЛ, Москва, 1948.

VERIFICATION OF STATISTICAL HYPOTHESES ON THE TYPE OF A DISTRIBUTION BASED ON SMALL SAMPLES

A. A. PETROV (*MOSCOW*)

(*Summary*)

This paper gives a method of estimating the number of observations necessary to distinguish between two hypotheses on the type of a distribution. The difficulties encountered in distinguishing two types of distributions on the basis of small samples are related.

In the introduction the problem of verifying an hypothesis on the type of a distri-ution is described.

Part 1 gives the principal results of a general theory verifying statistical hypo-heses which are connected with the most powerful distinction test. An approximate ethod of evaluating the number of observations necessary to distinguish between two ival hypotheses is established.

Part 2 deals with the distribution of random vector η having coordinates:

$$y_i = \frac{x_i - \overline{x}}{s}; \quad i = 1, \ldots, n;$$

in which $\overline{x} = \frac{1}{h}\sum x_i$, $s^2 = \sum (x_i - \overline{x})^2$, where x_i are equally distributed inde-endent random variables.

The results of § 2 allow methods of § 1 to be applied to the problem of distinguish-ng between two hypotheses on the type of a distribution.

An example is given in § 3, where the problem of distinguishing between the ormal type and the rectangular type is solved by taking samples of size $n = 3$, and he number of necessary observations is evaluated.

Parts 4 and 5 relate the problem of distinguishing between the normal type of istribution and a type closely related to it with non-zero skewness of non-zero xcess. It is established how the necessary number of observations increases as the ize of the sample decreases.

Part 6 gives a relationship between the number of observations necessary for dis-inguishing between two hypotheses based on small samples and the number of obser-ations necessary if all the data are obtained from one large sample.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 2*
1956

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

НОМОГРАММА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА

ДЖЕМС-ЛЕВИ Г. Е.

Для интегрального закона распределения Стьюдента номограмма строилась неоднократно *. Однако и сейчас еще нельзя считать окончательно разрешенной задачу номографированйя этой зависимости.

Предлагаемая нами номограмма построена приближенным методом, разработанным автором. Заданная поверхность заменяется нами интерполяционной номографируемой поверхностью. Обе поверхности совпадают на контуре координатного прямоугольника и еще в одной точке, выбираемой по произволу.

Изложим вкратце метод построения номограммы.

Считая, что данное уравнение

$$z = F(x, y), \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1 \tag{1}$$

совпадает с уравнением некоторой номограммы с прямолинейной равномерной ответной шкалой

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & \varphi_1(x) & 1 \\ f_2(x) & \varphi_2(x) & 1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

будем искать функции f_i и φ_i на основании тождества

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & \varphi_1(x) & 1 \\ f_2(y) & \varphi_2(y) & 1 \\ F(x,y) & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0. \tag{3}$$

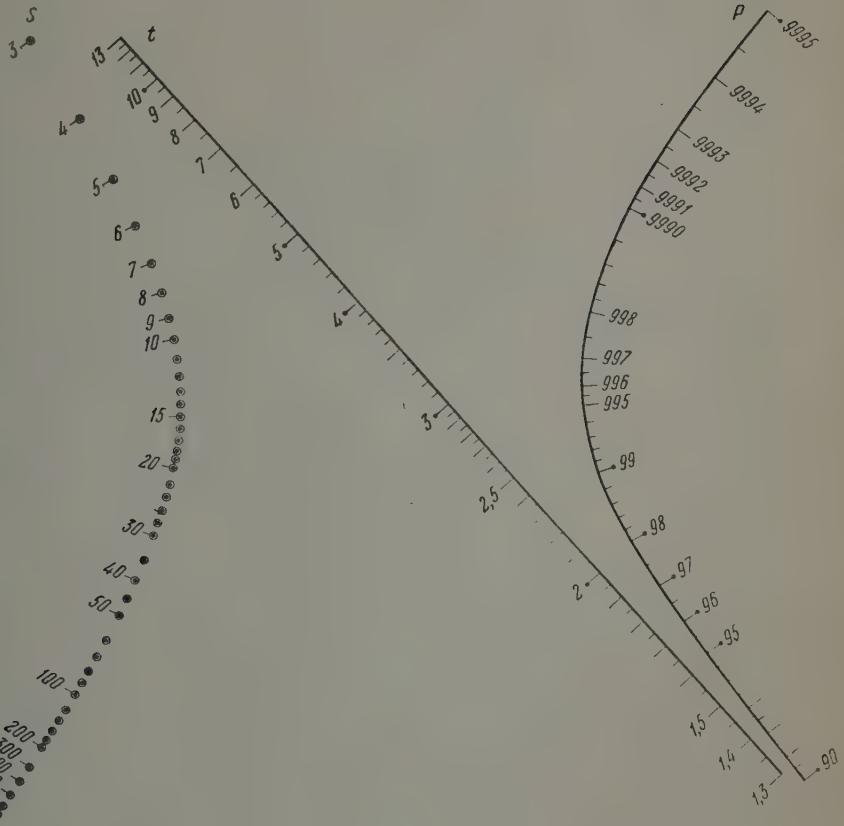
Если z изменяется в пределах $z_{11} \leqslant z \leqslant z_{22}$, то предварительно надо произвести преобразование $\overline{Z} = \dfrac{z - z_{11}}{z_{22} - z_{11}}$. Очевидно, что $\overline{z}$ изменяется уже в нужных пределах: $0 \leqslant \overline{z} \leqslant 1$.

Давая величине x частные значения x_1 и x_2 и разрешая полученные из (3) соотношения относительно $f_2(y)$ и $\varphi_2(y)$, получим:

$$f_2(y) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) \cdot F(x_1, y) & F(x_1, y) - f_1(x_1) \\ \varphi_1(x_2) \cdot F(x_2, y) & F(x_2, y) - f_1(x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & F(x_1, y) - f_1(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & F(x_2, y) - f_1(x_2) \end{vmatrix}}; \tag{4}$$

$$\varphi_2(y) = \frac{\varphi_1(x_1)\,\varphi_1(x_2)[F(x_2, y) - F(x_1, y)]}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & F(x_1, y) - f_1(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & F(x_2, y) - f_1(x_2) \end{vmatrix}}, \tag{5}$$

* Номограмма распределения Стьюдента построена приближенным методом М. В. Пентковским в его докторской диссертации, а с повторением переменного Н. Д. Ермиловым в работе «Номографические методы в математической статистике», 1947 г.


s
t
p
3
4
5
6
7
8
9
10
15
20
30
40
50
100
200
300
400
500
1000
∞
13
10
9
8
7
6
5
4
3
2,5
2
1,5
1,4
1,3
9995
9994
9993
9992
9991
9990
998
997
996
995
99
98
97
96
95
90

давая величине y значение y_1 и y_2, получим:

$$f_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_2(y_1) F(x, y_1) & F(x, y_1) - f_2(y_1) \\ \varphi_2(y_2) F(x, y_2) & F(x, y_2) - f_2(y_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_2(y_1) & F(x, y_1) - f_1(y_1) \\ \varphi_2(y_2) & F(x, y_2) - f_2(y_2) \end{vmatrix}},$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi_2(y_1)\,\varphi_2(y_2)\,[F(x_2, y) - F(x_1, y)]}{\begin{vmatrix} \varphi_2(y_1) & F(x, y_1) - f_2(y_1) \\ \varphi_2(y_2) & F(x, y_2) - f_2(y_2) \end{vmatrix}}. \qquad (7)$$

Воспользовавшись возможностью проективного преобразования, не изменяющего шкалы z, можем считать, что

$$f_1(x_1) = 0, \quad \varphi_1(x_1) = l, \quad f_1(x_2) = 1, \quad \varphi_1(x_2) = 1. \qquad (8)$$

Координаты точек шкалы y с отметками y_1 и y_2 определяем по полученным таким образом упрощенным уравнениям (4) и (5):

$$f_2(y_1) = 0, \quad f_2(y_2) = 1$$

$$\varphi_2(y_1) = \frac{F(x_2, y_1)}{F(x_2, y_1) - 1}, \quad \varphi_2(y_2) = l\,\frac{F(x_1, y_2) - 1}{F(x_1, y_2)}. \qquad (9)$$

Таким образом, для полного определения уравнений шкал номограммы остается выяснить величину l. Если написать определитель (3), заменив функции φ_i, f_i полученными их выражениями (4) – (8), а затем разрешить полученное соотношение относительно l, то получим:

$$l = \frac{F(x_2, y)}{F(x_1, y_2) - 1} \cdot \frac{\begin{vmatrix} [1 - F(x_1, y_2)]\,[F(x_2, y) - F(x, y)] & F(x_1 y_2)\,[F(x_1, y) - F(x, y_1)] \\ [1 - F(x, y_2)]\,[F(x_2, y) - F(x_1, y)] & F(x_1 y)\,[F(x_1, y_2) - F(x, y_1)] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [1 - F(x_2, y_1)]\,[F(x, y_2) - F(x, y)] & F(x_2, y_1)\,[F x, y) - F(x_1, y)] \\ [1 - F(x_2, y)]\,[F(x, y_2) - F(x, y_1)] & F(x, y)\,[F(x_2, y) - F(x_1, y)] \end{vmatrix}} \qquad (10)$$

Давая в этом тождестве переменным x и y произвольные значения x_0 и y_0, найдем величину l.

Так как все приведенные выкладки по существу используют лишь совпадение заданной поверхности (1) с номографируемой поверхностью (2), на четырех сечениях $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$, $y = y_2$ и в точке (x_0, y_0), то указанный алгоритм приводит (при некоторых ограничениях общего характера) либо к точной номограмме данного уравнения, если существует таковая с равномерной прямолинейной ответной шкалой, либо к приближенной (интерполяционной).

Для рассматриваемой задачи построения номограммы интегрального закона распределения Стьюдента мы потребовали совпадения поверхности, заданной уравнением

$$p = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi s}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{t^2}{s}\right)^{-\frac{s+1}{2}} dt, \qquad (11)$$

и поверхности, заданной уравнением (2), на сечениях

$$x_1 = p_1 = 0{,}9, \quad x_2 = p_2 = 0{,}995, \quad y_1 = s_1 = \infty, \quad y_2 \equiv s_2 = 3 \qquad (12)$$

и в точке $p = 0{,}99$, $s = 13$.

После выяснения приемлемости такой аппроксимации мы выполнили проективное преобразование полученной номограммы

$$u = \frac{1000u + 200}{5v + 1}; \quad v = \frac{1200v}{5v + 1}, \qquad (13)$$

очевидно, не меняющее величины теоретической погрешности, но улучшающее расположение номограммы на чертеже и приближающее ответную шкалу по характеру к логарифмической.

Расчет номограммы производился на основании таблиц (Митропольский, Статистическое исчисление, Ленинград, 1953 г.).

Для некоторой оценки теоретической точности номограммы может служить следующая таблица. В верхней строке здесь указаны значения t, вычисленные по координатам точек на шкалах номограммы, а во второй значения, приведенные в таблице Митропольского.

p \ s	5	10	15	20	30	100
950	2018	1812	1753	1723	1696	1659
	2015	1812	1753	1725	1697	1660
975	2579	2228	2131	2083	2039	1962
	2571	2228	2131	2086	2042	1984
995	4071	3177	2949	2842	2745	2623
	4032	3169	2947	2845	2750	2626
999	5907	4161	3737	3552	3383	3170
	5893	4144	3733	3552	3385	3174

Поступила в редакцию
2.8.56.

A NOMOGRAM FOR THE INTEGRAL LAW OF STUDENT'S DISTRIBUTION

G. E. JAMES-LEVY (*MOSCOW*)

(*Summary*)

This paper gives an approximate construction of a nomogram for the integral law of Student's distribution.

ОДНА ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПОТОКОВ ОДНОРОДНЫХ СОБЫТИЙ

Г. А. ОСОСКОВ

Потоки однородных событий, о которых идет речь в настоящей статье, можно представить себе, например, как потоки телефонных вызовов. Поэтому в дальнейшем мы для наглядности будем пользоваться этой «телефонной» терминологией.

Любой поток однородных событий мы можем рассматривать как некоторый случайный процесс. Обозначим через $x(t)$ число вызовов такого потока, поступивших за промежуток времени от нуля до t. При фиксированном t $x(t)$ — случайная величина, таким образом, мы имеем однопараметрическое семейство случайных величин — случайный процесс $x(t)$. График любой реализации такого процесса — ступенчатая, неубывающая функция, имеющая вид «лестницы» со ступенями случайной ширины и единичной высоты.

Как известно, такой случайный процесс может быть задан совокупностью всех своих конечномерных распределений, т. е. для каждой группы положительных чисел $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ и каждой группы неотрицательных чисел $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_m$ мы должны уметь задавать вероятность системы m равенств: $x(t_1) = k_1$, $x(t_2) = k_2, \ldots, x(t_m) = k_m$ (m — произвольное натуральное число).

Поток вызовов называется стационарным, если при любых числах $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ и любом числе $a > 0$ закон распределения вектора $x(t_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ совпадает с законом распределения сдвинутого вектора $x(t_i + a) - x(a)$. Важной характеристикой процесса является его параметр λ, который определяется как

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{P}\{x(t) > 0\}}{t}$$

(в дальнейшем будем обозначать вероятность $\mathbf{P}\{x(t) > 0\}$ через $w(t)$). Например, про-

стейший поток однородных событий — пуассоновский процесс — может быть полностью определен с помощью своего параметра λ заданием известной системы вероятностей.

$$\mathbf{P}\{x(t)=k\}=V(k,t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

(Обозначение $V(k, t)$ для вероятности иметь ровно k вызовов стационарного потока за промежуток времени длины t мы сохраним и в дальнейшем).

Известно (см. [1]), что параметр λ существует для любого стационарного потока. Мы будем всюду предполагать в дальнейшем, что $\lambda<\infty$.

Нам нужно будет еще одно понятие — ординарность потока, которая выражает собой практическую невозможность совмещения двух событий в один и тот же момент времени, что может быть записано так:

$$\mathbf{P}\{x(t)\geqslant 2\}=o(t)\quad(t\to 0)$$

Должна быть отмечена роль простейшего типа потоков — пуассоновского процесса в практических приложениях теории массового обслуживания, где значительное большинство расчетов опирается на гипотезу о том, что поступающий поток вызовов является именно пуассоновским. Это часто необоснованное предположение дает результаты, очень хорошо совпадающие с опытом. Попытка объяснить «слишком хорошее» совпадение таких расчетов с практикой была сделана К. Пальмом [2], но его доказательства страдают неточностью и не окончены. В работе [1] А. Я Хинчина было показано, что если данный поток является суммой большого числа взаимно независимых потоков с малым параметром, причем от каждого из слагаемых потоков требуется лишь стационарность и ординарность, то при выполнении некоторых достаточных условий с ростом числа потоков, составляющих данный суммарный поток, последний будет приближаться к процессу Пуассона.

В настоящей статье существенно расширяются эти достаточные и найдены необходимые условия.

В своих доказательствах Пальм широко пользуется аппаратом введенных им так называемых функций Пальма. Он ввел их, не совсем удачно определив функцию Пальма $\varphi(t)$ для данного потока $x(t)$ как условную вероятность отсутствия вызовов в данном промежутке длины t при условии, что в начальный момент промежутка произошел вызов (вероятность этого условия равна нулю, что делает определение Пальма лишенным точного смысла). Мы определим эту функцию предельным переходом. Пусть имеются два примыкающих промежутка времени длин τ и t, обозначим вероятность $\mathbf{P}\{x(\tau)>0,\ x(\tau+t)-x(\tau)=0\}$ через $h(\tau, t)$. Условная вероятность отсутствия вызовов в промежутке длины t при условии, что они есть в малом промежутке длины τ, есть отношение

$$\frac{h(\tau,t)}{w(\tau)}.$$

Устремим τ к нулю. Если существует предел этой условной вероятности (а он существует для любого стационарного потока с конечным параметром, см., например, § 9 [1]), то назовем его функцией Пальма $\varphi(t)$. Это будет невозрастающая справа от нуля функция, для $t\leqslant 0$ положим по определению $\varphi(t)=1$.

Нам будет полезно связать эту условную вероятность с безусловной вероятностью $V(0, t)$ отсутствия вызовов нашего стационарного потока за время от нуля до t. Берем опять промежуток времени длины $\tau+t$. Очевидно, что

$$V(0,\tau+t)=\mathbf{P}\{x(\tau)=0,\ x(\tau+t)-x(\tau)=0\}=$$

$$=\mathbf{P}\{x(\tau+t)-x(\tau)=0\}-\mathbf{P}\{x(\tau)>0,\ x(\tau+t)-x(\tau)=0\}.$$

$$\frac{1}{\tau}[V(0,\tau+t)-V(0,t)]=-\frac{1}{\tau}h(\tau,t)=\frac{h(\tau,t)}{w(\tau)}\cdot\frac{w(\tau)}{\tau}.$$

При $\tau\to 0$ мы получаем, что предел правой части существует и равен $-\lambda\varphi(t)$, от-

куда следует существование производной

$$\frac{d}{dt} V(0, t) = -\lambda\varphi(t).$$

По определению положим $V(0, 0) = 1$ и $\lim\limits_{t\to\infty} V(0, t) = 0$. Интеграцией от нуля до t получаем:

$$V(0, t) = 1 - \lambda \int_0^t \varphi(u)\, du. \tag{1}$$

Устремив $t \to \infty$, получаем, что параметр потока может быть полностью определен через его функцию Пальма:

$$\lambda = \frac{1}{\int\limits_0^\infty \varphi(u)\, du}. \tag{2}$$

Теперь мы можем точно сформулировать нашу задачу. Имеется последовательность серий потоков

$$x_{11}(t);$$
$$x_{21}(t),\ x_{22}(t);$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n1}(t),\ x_{n2}(t), \ldots, x_{nn}(t);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

независимых в каждой серии, стационарных и ординарных. Обозначим их суперпозицию (простую сумму) в серии с номером n через $X_n(t)$. Пусть— λ_{nr} параметр, $\varphi_{nr}(t)$— функция Пальма потока $x_{nr}(t)$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$. Параметры потоков данной серии, складываясь, дают параметр суммарного потока

$$\Lambda = \lambda_{n1} + \lambda_{n2} + \ldots + \lambda_{nn}.$$

Для простоты мы будем предполагать, что Λ остается неизменным при росте n.

Обозначим также $\mathbf{P}\{x_{nr}(t) = k\}$ через $v_{nr}(k, t)$, а $\mathbf{P}\{X_n(t) = k\}$ через $V_n(k, t)$.

Задача заключается в том, чтобы найти такие ограничения на потоки в каждой серии, при которых с ростом n суперпозиция $X_n(t)$ сходилась бы к процессу Пуассона с параметром Λ.

Теорема. *Для того, чтобы суперпозиция $X_n(t)$ при $n \to \infty$ стремилась к процессу Пуассона с параметром Λ, достаточно выполнение условия*

А) *При фиксированном $t > 0$ числовая последовательность*

$$\frac{1}{\Lambda} \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr}\varphi_{nr}(t) \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Если выполнено требование бесконечной малости параметров слагаемых потоков, т. е. если при любом, как угодно малом $\eta > 0$

$$\max_{1 \leqslant r \leqslant n} \lambda_{nr} < \eta \tag{3}$$

для достаточно больших n, то условие А) *становится необходимым.*

Более удобной для нас эквивалентной записью условия А) будет следующая: для любого, как угодно малого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr}[1 - \varphi_{nr}(t)] < \varepsilon \tag{4}$$

для достаточно больших n.

Предварительно заметим, что благодаря связи параметра потока с его функцией Пальма бесконечная малость параметров слагаемых потоков является непосредственным следствием условия А). В самом деле, пусть (3) нарушено, т. е. при сколь угодно больших n

$$\max_{1\leqslant r\leqslant n} \lambda_{nr} > \delta > 0.$$

При любом n_0 будет существовать такой номер n и такое s, для которых $\lambda_{ns} > \delta$. Очевидно, что в силу (2)

$$t\varphi_{ns}(t) < \int_0^t \varphi_{ns}(u)\,du < \int_0^\infty \varphi_{ns}(u)\,du = \frac{1}{\lambda_{ns}} < \frac{1}{\delta}.$$

Для $t > \frac{2}{\delta}$ имеем:

$$\varphi_{ns}(t) < \frac{1}{\delta t} < \frac{1}{2}, \qquad 1 - \varphi_{ns}(t) > \frac{1}{2}.$$

Откуда при сколь угодно больших n

$$\sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr}[1 - \varphi_{nr}(t)] > \frac{1}{2},$$

что противоречит условию A).

Таким образом, требование (3) входит как в необходимое, так и в достаточное условия теоремы, но в последнее неявно, являясь его следствием. Это требование бесконечной малости параметров слагаемых потоков вполне закономерно. Так, благодаря ему устраняется тривиальная возможность такого случая, когда любой поток $x(t)$ с параметром Λ может выступать в качестве предельного для $X_n(t)$ (для этого достаточно, например, взять в каждой серии этот поток $x(t)$ как первое слагаемое, а в качестве остальных взять фиктивные потоки, с которых совсем не поступает вызовов).

Как мы увидим далее, роль условия A) заключается в том, что оно устраняет возможность скопления большого числа вызовов одного и того же слагаемого потока на малых участках (это может дать кратные скачки в предельном потоке, т. е. помешать сходимости суммарного потока к процессу Пуассона).

Перейдем к доказательству теоремы.

Необходимость. Пусть при $n \to \infty$ суперпозиция $X_n(t)$ потоков с бесконечно малыми параметрами стремится к процессу Пуассона с параметром Λ.

Это означает, в частности, что

$$\mathbf{P}\{X_n(t) = 0\} \to e^{-\Lambda t} \text{ при } n \to \infty. \tag{5}$$

Нам нужно показать, что отсюда вытекает условие А). Сделаем это от противного. Пусть условие А) нарушено, т. е. существуют такие точка t_0 и число $c < 0$, что для некоторой последовательности номеров n_k $(k = 1, 2, \ldots)$

$$\sum_{r=1}^{n_k} \lambda_{n_k r}[1 - \varphi_{n_k r}(t_0)] > c. \tag{6}$$

Покажем, что в этом случае предельный переход (5) невозможен. Благодаря независимости потоков

$$\mathbf{P}\{X_n(t) = 0\} = V_n(0, t) = \prod_{r=1}^{n} v_{nr}(0, t). \tag{7}$$

По формуле (1) и в силу предположенного требования (3)

$$\log v_{nr}(0, t) = \log\left[1 - \lambda_{nr}\int_0^t \varphi_{nr}(u)\,du\right] = -\lambda_{nr}\int_0^t \varphi_{nr}(u)\,du + o(\lambda_{nr}).$$

Отсюда

$$\log V_n(0,\ t) = \sum_{r=1}^{n} \log v_{nr}(0,\ t) = \sum_{r=1}^{n} \left[-\lambda_{nr} \int_0^t \varphi_n\ (u)\, du + o(\lambda_{nr}) \right] =$$

$$= -\sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} \int_0^t \varphi_{nr}(u)\, du + o(1).$$

Поэтому

$$\Lambda t + \log V_n(0,\ t) = t \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} - \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} \int_0^t \varphi_{nr}(u)\, du + o(1) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} \left[t - \int_0^t \varphi_{ar}(u)\ du \right] + o(1),$$

т. е.

$$\Lambda t + \log V_n(0,\ t) = \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} \int_0^t [1 - \varphi_{nr}(u)]\, du + o(1). \tag{8}$$

Теперь выберем $t \geqslant 2t_0$. Тогда

$$\Lambda t + \log V_n(0,\ t) \geqslant \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} \int_{t_0}^{2t_0} [1 - \varphi_{nr}(u)]\, du \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} t_0 [1 - \varphi_{nr}(t_0)] = t_0 \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} [1 - \varphi_{nr}(t_0)].$$

Отсюда в соответствии с (6) для n, пробегающих последовательность номеров n_k, имеем:

$$|\Lambda t + \log V_{n_k}(0,\ t)| > ct_0,$$

то делает невозможным предельный переход (5).

Противоречие доказывает необходимость признака А).

Достаточность. Мы должны убедиться в том, что из условия А) следует стремление суперпозиции $X_n(t)$ к процессу Пуассона с параметром Λ. Иными словами, нужно показать, что при любых числах $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ и любых целых $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_m$ вероятности

$$\mathbf{P}\{X_n(t_i) = k_i;\quad t = 1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$$

при $n \to \infty$ будут стремиться к соответствующим вероятностям процесса Пуассона, которые, как известно, имеют вид:

$$\mathbf{P}\{x(t_i) = k_i;\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m\} = e^{-\Lambda t_m} \Lambda^{k_m} \prod_{i=1}^{m} \frac{(t_i - t_{i-1})^{k_i - k_{i-1}}}{(k_i - k_{i-1})!},$$

$$(t_0 = k_0 = 0).$$

В § 16 книги [1] можно найти доказательство этого факта, основанное на следующих положениях, касающихся поведения суперпозиции $X_n(t)$ в произвольном конечном промежутке времени $(0,\ t)$:

Во-первых, при $n \to \infty$ стремится к нулю вероятность того, что хотя бы один из слагаемых потоков содержит в промежутке $(0,\ t)$ более одного вызова;

во-вторых

$$V_n(k,\ t) \to e^{-\Lambda t} \frac{(\Lambda t)^k}{k!}\ (n \to \infty).$$

Таким образом, если мы, опираясь только на условие A), докажем оба эти предложения, то доказательство теоремы будет окончено.

Введем обозначения для событий:

A_k — в промежутке $(0,\ t)$ поступит ровно k вызовов суммарного потока,

H_1 — ни один из слагаемых потоков не содержит в $(0,\ t)$ более одного вызова,

H_2 — хотя бы один из слагаемых потоков содержит в $(0,\ t)$ более одного вызова.

Мы хотим показать, что

$$\mathbf{P}(H_2) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Воспользуемся для этого одной леммой, доказанной А. Я. Хинчиным [1].

Лемма. *Пусть мы имеем стационарный и ординарный поток с параметром* λ *и функцией Пальма* $\varphi(t)$ *и пусть* $\psi(t)$ *есть вероятность поступления не менее двух вызовов потока за время* t. *Тогда при любом* $t > 0$

$$\psi(t) \leqslant \lambda t\,[1 - \varphi(t)].$$

Обозначим

$$\mathbf{P}\{x_{nr}(t) \geqslant 2\} = \psi_{nr}(t) \qquad (1 \leqslant r \leqslant n).$$

По лемме

$$\mathbf{P}(H_2) \leqslant \sum_{r=1}^{n} \varphi_{nr}(t) \leqslant \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} t\,[1 - \varphi_{nr}(t)].$$

Согласно условию А) последнее выражение как угодно мало для достаточно больших n.

Обратимся далее к исследованию поведения $V_n(k,\ t)$. Прежде всего, из условия А) сразу же следует, что при фиксированном t

$$\lim_{n \to \infty} V_n(0,\ t) = e^{-\Lambda t}.$$

В самом деле, благодаря монотонности $\varphi(t)$

$$\int_0^t [1 - \varphi_{nr}(u)]\,du \leqslant t\,[1 - \varphi_{nr}(t)].$$

Поэтому из формул (7), (8) и (4) следует:

$$|\,\Lambda t + \log V_n(0,\ t)\,| \leqslant t \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr}\,[1 - \varphi_{nr}(t)] < \varepsilon t$$

для достаточно больших n. В силу произвольности ε

$$\lim_{n \to \infty} \log V_n(0,\ t) = -\Lambda t.$$

Если обозначить $\lim\limits_{n \to \infty} V_n(0,\ t)$ через $V(0,\ t)$, то

$$V(0,\ t) = e^{-\Lambda t}. \tag{9}$$

Что касается

$$V_n(k,\ t) = \mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(H_1 A_k) + \mathbf{P}(H_2 A_k),$$

то, как мы показали,

$$\mathbf{P}(H_2 A_k) \leqslant \mathbf{P}(H_2) \to 0 \quad (n \to \infty);$$

таким образом,

$$V_n(k,\ t) = \mathbf{P}(H_1 A_k) + o(1).$$

Событие $H_1 A_k$ состоит в том, что из n слагаемых потоков какие-то k (пусть их номера $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k$) содержат в промежутке $(0,\ t)$ по одному вызову, а остальные $n - k$ в этом промежутке вызовов не содержат.

$$\mathbf{P}(H_1 A_k) = \sum \frac{v_{nr_1}(1,\ t) \cdot v_{nr_2}(1,\ t) \ldots v_{nr_k}(1,\ t)}{v_{ur_1}(0,\ t) \cdot v_{nr_2}(0,\ t) \ldots v_{nr_k}(0,\ t)} \cdot \prod_{j=1}^{n} v_{nj}(0,\ t).$$

(Здесь, как и всюду в дальнейшем, знак Σ без индексов суммирования будет означать суммирование по $1 \leqslant r_i \leqslant n$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $r_i \neq r_j$ $(i \neq j)$, т. е. по всевозможным комбинациям индексов $r_1, r_2, \ldots, r_k$ за исключением тех, в которых какие-то индексы совпадают.)

Таким образом,

$$V_n(k, t) = V_n(0, t) \sum \prod_{i=1}^{k} \frac{v_{nr_i}(1, t)}{v_{nr_i}(0, t)} + o(1).$$

Оценим далее отношение

$$\frac{v_{nr_i}(1, t)}{v_{nr_i}(0, t)}.$$

Поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} v_{nr_i}(k, t) = 1$, то

$$v_{nr_i}(1, t) = 1 - v_{nr_i}(0, t) - \psi_{nr_i}(t).$$

По лемме

$$\psi_{nr_i}(t) \leqslant \lambda_{nr_i} t\,[1 - \varphi_{nr_i}(t)],$$

а в силу (1)

$$1 - v_{nr_i}(0, t) = \lambda_{nr_i} \int_0^t \varphi_{nr_i}(u)\, du \geqslant \lambda_{nr_i} t \varphi_{nr_i}(t),$$

отсюда

$$v_{nr_i}(1, t) \geqslant \lambda_{nr_i} t \varphi_{nr_i}(t) - \lambda_{nr_i} t\,[1 - \varphi_{nr_i}(t)] = \lambda_{nr_i} t [2\varphi_{nr_i}(t) - 1].$$

Далее из (1) имеем

$$v_{nr_i}(1, t) \leqslant 1 - v_{nr_i}(0, t) = \lambda_{nr_i} \int_0^t \varphi_{nr_i}(u)\, du \leqslant \lambda_{nr_i} t.$$

Кроме того

$$1 - \lambda_{nr_i} t \leqslant v_{nr_i}(0, t) \leqslant 1,$$

поэтому в силу (3)

$$\frac{v_{nr_i}(1, t)}{v_{nr_i}(0, t)} \leqslant \frac{\lambda_{nr_i} t}{1 - \lambda_{nr_i} t} = \lambda_{nr_i} t\,[1 + o(1)].$$

Окончательно мы получаем оценку

$$\lambda_{nr_i} t\,[2\varphi_{nr_i}(t) - 1] \leqslant \frac{v_{nr_i}(1, t)}{v_{nr_i}(0, t)} \leqslant \lambda_{nr_i} t\,[1 + o(1)].$$

Умножив эти неравенства на $V_n(0, t)$ и просуммировав, получаем оценку для $V_n(k, t)$:

$$V_n(0, t)\, t^k \sum \prod_{i=1}^{k} \lambda_{nr_i} [2\varphi_{nr_i}(t) - 1] \leqslant V_n(k, t) + o(1) \leqslant$$

$$\leqslant [1 + o(1)]\, t^k V_n(0, t) \sum \prod_{i=1}^{k} \lambda_{nr_i}. \qquad (10)$$

Поведение суммы

$$\sum \lambda_{nr_1} \cdot \lambda_{nr_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{nr_k}$$

при $n \to \infty$ исследовалось в § 15 [1]. Там показано, что предел этой суммы при $n \to \infty$ равен $\frac{\Lambda^k}{k!}$, поэтому, учитывая (9), мы можем сказать, что при $n \to \infty$ пра-

вая сторона неравенства (10) стремится к

$$e^{-\Lambda t}\frac{(\Lambda t)^k}{k!}.$$

Для доказательства достаточности нам, таким образом, осталось показать, что и левая часть неравенства (10) стремится к тому же пределу. Или, если обозначить для простоты

$$\nu_{r_i} = \lambda_{nr_i}[2\varphi_{nr_i}(t) - 1],$$

требуется доказать

$$S_k = \sum \prod_{i=1}^{k} \nu_{r_i} \to \frac{\Lambda^k}{k!} \qquad (n \to \infty).$$

Докажем это индукцией по числу k. При $k = 1$

$$S_1 = \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr}[2\varphi_{nr}(t) - 1] = \Lambda - 2\sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr}[1 - \varphi_{nr}(t)].$$

В силу условия А)

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = \Lambda.$$

Пусть теперь для некоторого $k > 1$ при $n \to \infty$

$$S_{k-1} = \sum \nu_{r_1} \cdot \nu_{r_2} \cdots \nu_{r_{k-1}} = \frac{\Lambda^{k-1}}{(k-1)!} + o(1).$$

Умножим каждый член суммы S_{k-1} на сумму всех ν_{r_i}, не входящих в него, т. е. на величину

$$\sum_{r_k=1}^{n} \nu_{r_k} - \nu_{r_1} - \nu_{r_2} - \cdots - \nu_{r_{k-1}}.$$

После того как будут проведены все необходимые действия и раскрыты скобки, мы получим сумму произведений вида $\nu_{r_1} \cdot \nu_{r_2} \cdots \nu_{r_k}$, где индексы $r_1, r_2, \ldots, r_k$ попарно различны между собой. Любое такое произведение дает нам один из членов суммы S_k, причем при такой операции каждый член суммы S_k получается ровно k раз (член $\nu_{r_1} \cdot \nu_{r_2} \cdots \nu_{r_k}$ мы получаем k способами: как $(\nu_{r_1} \cdots \nu_{r_{k-1}})\nu_{r_k}$, как $(\nu_{r_1} \cdot \nu_{r_2} \cdots \cdots \nu_{r_{k-2}}) \cdot \nu_{r_{k-1}}$ и т. д., наконец как $(\nu_{r_1} \cdot \nu_{r_2} \cdots \nu_{r_k})\nu_{r_1}$).

В силу условия А) и требования (3) для достаточно больших n мы имеем:

$$\Lambda \geqslant \sum_{r_k=1}^{n} \nu_{r_k} - \nu_{r_1} - \nu_{r_2} - \cdots - \nu_{r_{k-1}} = \sum_{r_k=1}^{n} \lambda_{nr_k}[2\varphi_{nr_k}(t) - 1] -$$

$$- \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{nr_i}[2\varphi_{nr_i}(t) - 1] = \sum_{r_k=1}^{n} \lambda_{nr_k} - 2\sum_{r_k=1}^{n} \lambda_{nr_k}[1 - \varphi_{nr_k}(t)] -$$

$$- \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{nr_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{nr_i}[1 - \varphi_{nr_i}(t)] \geqslant \Lambda - 2\varepsilon - \eta k.$$

Из этих вычислений получаем:

$$(\Lambda - 2\varepsilon - \eta k) S_{k-1} \leqslant k S_k \leqslant \Lambda S_{k-1}.$$

При $n \to \infty$ с учетом индукционного предположения находим:

$$(\Lambda - 2\varepsilon - \eta k)\left[\frac{\Lambda^{k-1}}{(k-1)!} + o(1)\right] \leqslant k S_k \leqslant \Lambda\left[\frac{\Lambda^{k-1}}{(k-1)!} + o(1)\right].$$

Откуда

$$\lim S_k = \frac{\Lambda^k}{k!}.$$

Теорема доказана.

Поступила в редакцию
26.7.56

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания, Труды Мат. инст. им. В. А. Стеклова, т. 49.

[2] C. Palm, Intensitätsschwankungen im Fernsprechverkehr», Ericsson Technics, 1943, 44, 1—189.

EIN GRENZTHEOREM FÜR FOLGEN GLEICHARTIGER EREIGNISSE

G. A. OSSOSKOW (MOSKAU)

(Zusammenfassung)

Im forliegendem Artikel werden Folgen gleichartiger zufälliger Ereignisse (z. B. eine Folge von Fernrufen) betrachtet. Die Zahl $x(t)$ der im Zeitraum $(0, t)$ eintreffenden Anrufe einer solchen Folge ist eine zufällige Grösse, die von t abhängt. Deshalb kann man $x(t)$ als einen gelegentlichen Prozess betrachten.

Eine Folge nennt man stationär, wenn der entsprechende zufällige Prozess ein Prozess mit stationären Zuwachs ist, und ordinär, wenn für ihn die Unmöglichkeit des Zusammenfallens zweier oder mehrerer Anrufe in ein und demselben Zeitmoment kennzeichnend ist, d. h.

$$\mathbf{P}\{x(t) \geqslant 2\} = o(t) \qquad (t \to 0)$$

Parameter der Folge nennen wir folgenden Grenzwert

$$\lambda = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{P}\{x(t) > 0\}}{t}.$$

Die Palmsche Funktion $\varphi(t)$ für eine stationäre Folge $x(t)$ kann als Bedingungswahrscheinlichkeit bei Abwesenheit von Anrufen der Folge im Zeitraum $(0, t)$ definiert werden. unter Berücksichtigung der Bedingung, das im Anfangsmoment des Zeitraums ein Anruf gewesen ist, oder genauer:

$$\varphi(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\mathbf{P}\{x(\tau) > 0,\ x(\tau + t) - x(\tau) = 0\}}{\mathbf{P}\{y(\tau) > 0\}}$$

wobei τ und t die Längen zweier angrenzender Zeiträume sind.

Nunmehr betrachten wir eine Reihe von Serien

$$x_{n1}(t), \quad x_{n2}(t), \ldots, \quad x_{nn}(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

untereinander unabhängiger, stationärer und ordinärer Folgen von Anrufen. Es sei nun $X_n(t)$ eine Superposition (einfache Summe) aller Folgen in der Serie mit der Nummer n; λ_{nr} der Parameter und $\varphi_{nr}(t)$ die Palmsche Fungtion der Folge $x_{nr}(t)$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$. Der Parameter der summierten Folge ist $\Lambda = \lambda_{n1} + \lambda_{n2} + \ldots + \lambda_{nn}$. ($\Lambda$ bleibt bei wachsenden n konstant).

Satz.

Die Bedingung

$$\frac{1}{\Lambda} \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} \varphi_{nr}(t) \to 1 \qquad (n \to \infty,\ t > 0) \tag{A}$$

ist eine hinreichende Bedingung dafür, das $X_n(t)$ für $n \to \infty$ gegen den Poissonschen Prozess mit dem Parameter Λ konvergiert.

Im Falle unendliche kleine Parameter der Folgen $x_{nr}(t)$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$, d. h. im Falle wenn für beliebig kleinen $\delta > 0$

$$\max_{1 \leqslant r \leqslant n} \lambda_{nr} < \delta$$

für hinreichende große n, ist die Bedingung (A) auch notwendig.

Zum Beweis dieses Satzes werden die Ergebnisse aus Kapitel 5 [1] benutzen.

О КОМПОЗИЦИИ ОДНОВЕРШИННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

И. А. ИБРАГИМОВ

Функция распределения $F(x)$ называется одновершинной, если существует по меньшей мере одно значение $x = a$ такое, что при $x < a$ функция $F(x)$ выпукла, а при $x > a$ вогнута. Известно, что одновершинная функция распределения имеет в каждой точке, исключая, может быть, вершину распределения (точка a) правую и левую производные, не убывающие при $x < a$ и не возрастающие при $x > a$ (причем $D_d F(x) \leqslant D_s F(x)$ при $x > a$ и $D_d F(x) \geqslant D_s F(x)$ при $x < a$).

Через E обозначим множество, состоящее из всех тех точек x, для которых $D_d F(x)\, D_s F(x) \neq 0$. Очевидно, что множество E непрерывной одновершинной функции распределения будет промежутком (конечным или нет).

Будем говорить, что функция распределения $F(x)$ сильно одновершинная, если композиция $F(x)$ с любой одновершинной функцией распределения одновершинна.

Очевидно, что всякая сильно одновершинная функция распределения одновершинна. Докажем следующую теорему:

Теорема. *Для того, чтобы собственная одновершинная функция распределения $F(x)$ была сильно одновершинной, необходимо и достаточно, чтобы функция $F(x)$ была непрерывной, а функция $\psi(x) = \ln F'(x)$ была вогнутой функцией на E.*

В дальнейшем, если это не будет оговорено особо, предполагается, что вершины рассматриваемых распределений находятся в нуле ($a = 0$).

Нам будет удобнее доказать сначала сильную одновершинность нормальной функции распределения. Пусть сперва $F(x)$ — одновершинная функция распределения с абсолютно непрерывной производной $F'(x)$ и $G(x) = F(x) * \Phi(x\sigma)$. Тогда ([1], [2])

$$G''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left[e^{-\frac{\sigma^2}{2}(x-t)^2} \right]' dF(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int \left[e^{-\frac{\sigma^2}{2}(x-t)^2} \right]' F'(t)\, dt =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{\sigma^2}{2}(x-t)^2} F''(t)\, dt,$$

причем последний интеграл, возможно, лебегов.

Если $t > 0$, то почти всюду $F''(t) \leqslant 0$, $F''(-t) \geqslant 0$. Нам достаточно доказать, что из $G''(x_0) = 0$ следует $G''(x_0 + \delta) \leqslant 0$, если только $\delta > 0$.

Имеем

$$G''(x_0) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^\infty F''(t)\, e^{-\frac{\sigma^2}{2}(x_0-t)^2} dt + \int_0^\infty F''(-t)\, e^{-\frac{\sigma^2}{2}(x_0+t)^2} dt \right) = 0,$$

$$G''(x_0+\delta) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2\delta^2}{2} - \sigma^2\delta x_0} \left(\int_0^\infty F''(t)\, e^{-\frac{\sigma^2}{2}(x_0-t)^2} e^{\sigma^2\delta t}\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty F''(-t)\, e^{-\frac{\sigma^2}{2}(x_0+t)^2} e^{-\sigma^2\delta t}\, dt \right) =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2\delta^2}{2} - \sigma^2\delta x_0} \left(e^{\sigma^2\delta\xi_1} \int_0^\infty F''(t)\, e^{-\frac{\sigma^2}{2}(x_0-t)^2} dt + e^{-\sigma^2\delta\xi_2} \int_0^\infty F''(-t)\, e^{-\frac{\sigma^2}{2}(x_0+t)} dt \right) \leqslant 0.$$

Известно [3], что функция распределения, являющаяся предельной (в смысле слабой сходимости) для последовательности одновершинных распределений, сама одновершинна. Поэтому сильная одновершинность $\Phi(x\sigma)$ теперь сразу следует из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $F(x)$ — одновершинная функция распределения. Тогда существует последовательность $\{F_n(x)\}$ одновершинных функций распределения такая, что $F_n(x) \Rightarrow F(x)$* и $F_n'(x)$ абсолютно непрерывна.*

---

* $F_n(x)$ слабо сходится к $F(x)$ (см. [3]).

Заметим, что если

$$F_n(x) \Rightarrow F(x)$$

и

$$F_{mn}(x) \Rightarrow F_n(x),$$

то существует последовательность $F_{m_k n_k}(x) \Rightarrow F(x)$.

Поэтому нам достаточно ограничиться случаем, когда $F(x)$ имеет своей производной ступенчатую функцию. В этом случае, очевидно, существуют абсолютно непрерывные функции $\varphi_n(x)$, не убывающие на $(-\infty, 0)$ и не возрастающие на $(0, \infty)$ и такие, что при всех x

$$\int_{-\infty}^{x} \varphi_n(x)\,dx \to \int_{-\infty}^{x} F'(x)\,dx.$$

Тогда и

$$F_n(x) = \frac{1}{\int \varphi_n(x)\,dx} \int_{-\infty}^{x} \varphi_n(x)\,dx \Rightarrow F(x).$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству необходимости. Будем сначала предполагать, что $F(x)$ достаточно гладкая (например, $F''(x)$ существует и непрерывна) и что $E = (-\infty, \infty)$.

Допустим, что функция

$$\psi(x) = \ln F'(x)$$

не вогнутая. Тогда существует такое число $\delta > 0$ и промежутки T_u и T_v (T_v левее T_u), что для $v \in T_v$ и $u \in T_u$

$$\left.\begin{aligned} \psi(v+\delta) - \psi(v) &< \psi(u+\delta) - \psi(u) \\ \psi(v-\delta) - \psi(v) &> \psi(u-\delta) - \psi(u) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Действительно, в противном случае для любой пары точек v, u $(v < u)$ нашлась бы такая последовательность $\{\delta_n\}$ $(\delta_n > 0,\ \delta_n \to 0)$, что либо

$$\psi(v+\delta_n) - \psi(v) \geqslant \psi(u+\delta_n) - \psi(u), \tag{1'}$$

либо

$$\psi(v-\delta_n) - \psi(v) \leqslant \psi(u-\delta_n) - \psi(u), \tag{1''}$$

Пусть, например, для каких-то u, v и последовательности $\{\delta_{n_k}\}$ имеет место (1'). Тогда

$$\frac{\psi(v+\delta_{n_k}) - \psi(v)}{\delta_{n_k}} \geqslant \frac{\psi(u+\delta_{n_k}) - \psi(u)}{\delta_{n_k}},$$

$$\psi'(v) \geqslant \psi'(u)$$

и так как это будет для всех v и u $(v < u)$, то $\psi(x)$ — вогнутая функция.

Таким образом, если $\psi(x)$ невогнутая функция, то имеет место (1) и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \frac{F'(v+\delta)}{F'(v)} &< \frac{F'(u+\delta)}{F'(u)} \\ \frac{F'(v-\delta)}{F'(v)} &> \frac{F'(u-\delta)}{F'(u)} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

для всех $v \in T_v$ и $u \in T_u$.

Мы будем считать, что для всех $v \in T_v$ и $u \in T_u$

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{F'(v+\delta)}{F'(v)} - \frac{F'(u+\delta)}{F'(u)}\right| &\geqslant h > 0, \\ \left|\frac{F'(v-\delta)}{F'(v)} - \frac{F'(u-\delta)}{F'(u)}\right| &\geqslant h > 0, \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

где h — некоторое положительное число.

Пусть u_0 и v_0 — середины промежутков T_u и T_v. Положим $x_0 = \frac{v_0 + u_0}{2}$; через $T = [t_1, t_2]$ обозначим такой промежуток с центром в $\frac{u_0 - v_0}{2}$, что $0 < t_1 < t_2$ и $x_0 - t \in T_u$, $x_0 - t \in T_v$ для всех $t \in T$. Через T^* обозначим промежуток, симметричный T относительно нуля. Определим функцию $g(t)$ следующим образом:

$$g(t) = -\frac{(t-t_1)^2(t-t_2)^2}{\int\limits_T (t-t_1)^2(t-t_2)^2 F'(x_0 - t)\,dt}, \quad \text{когда } t \in T,$$

$$g(t) = \frac{(t+t_1)^2(t+t_2)^2}{\int\limits_T (t-t_1)^2(t-t_2)^2 F'(x_0 + t)\,dt}, \quad \text{когда } t \in T^*.$$

Если

$$\int\limits_T g(t)\,dt + \int\limits_{T^*} g(t)\,dt = a \neq 0,$$

то подберем такие функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и такие промежутки

$$[\alpha_1, \beta_1],\ [\alpha_2, \beta_2]\ (\alpha_1 < \beta_1 < -t_2,\ t_2 < \alpha_2 < \beta_2), \quad \text{что}$$
$$\varphi_1(\alpha_1) = \varphi_1(\beta_1) = \varphi_2(\alpha_2) = \varphi_2(\beta_2) = 0;$$

$\varphi_1(t)$ непрерывна, когда $t \in [\alpha_1, \beta_1]$; $\varphi_2(t)$ непрерывна, когда $t \in [\alpha_2, \beta_2]$;

$$\varphi_1(t) > 0\ (t \in (\alpha_1, \beta_1)),\quad \varphi_2(t) < 0\ (t \in (\alpha_2, \beta_2));$$

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} \varphi_1(t)\,dt + \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} \varphi_2(t)\,dt = -a;$$

$$\int\limits_{-\beta_1}^{-\alpha_1} \varphi_1(-t) F'(x_0 + t)\,dt + \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} \varphi_2(t) F'(x_0 - t)\,dt = 0;$$

$$\left\{\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} |\varphi_1(t)|\,dt + \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} |\varphi_2(t)|\,dt\right\} \max\left\{\max_{t \in [-\beta_1, -\alpha_1]} F'(x_0 \pm \delta + t),\right.$$
$$\left.\max_{t \in [\alpha_2, \beta_2]} F'(x_0 \pm \delta - t)\right\} < \frac{h}{2}.$$

Мы всегда можем удовлетворить этим требованиям, так как $F'(t)$ непрерывна и $\lim\limits_{t \to \infty} tF'(t) = 0$ (см. [3]).

Положим, наконец,

$$g(t) = \varphi_1(t), \quad \text{когда } t \in [\alpha_1, \beta_1]$$
$$g(t) = \varphi_2(t), \quad \text{когда } t \in [\alpha_2, \beta_2]$$
$$g(t) = 0, \quad \text{когда } t \overline{\in} T \cup T^* \cup [\alpha_1, \beta_1] \cup [\alpha_2, \beta_2]$$

и

$$G(x) = \frac{1}{\int du \int\limits_{-\infty}^{u} g(t)\,dt} \int\limits_{-\infty}^{x} du \int\limits_{-\infty}^{u} g(t)\,dt,$$

$G(x)$ — одновершинная функция распределения.

Пусть $H(x) = G(x) * F(x)$

$$H''(x) = \frac{1}{\int du \int_{-\infty}^{u} g(t)\,dt}\left(\int_T g(t)\,F'(x_0 - t)\,dt + \int_T g(-t)\,F'(x_0 + t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{-\beta_1}^{-\alpha_1} g(-t)\,F'(x_0 + t)\,dt + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} g(t)\,F'(x_0 - t)\,dt\right) = 0,$$

$$H''(x_0 + \delta) = \frac{1}{\int du \int_{-\infty}^{u} g(t)\,dt}\left(\frac{F'(x_0 + \delta - \xi_1)}{F'(x_0 - \xi_1)}\int_T g(t)\,F'(x_0 - t)\,dt + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} g(t)\,F'(x_0 + \delta - t)dt + \right.$$

$$\left. + \frac{F'(x_0 + \delta + \xi_2)}{F'(x_0 + \xi_2)}\int_T g(t)\,F'(x_0 + t)\,dt + \int_{-\beta_1}^{-\alpha_1} g(-t)\,F'(x_0 + \delta + t)\,dt\right) >$$

$$> \frac{h}{2}\,\frac{1}{\int du \int_{-\infty}^{u} g(t)\,dt} > 0$$

в силу (2′). Точно так же

$$H''(x_0 - \delta) < -\frac{h}{2}\,\frac{1}{\int du \int_{-\infty}^{u} g(t)\,dt}$$

и, следовательно, $H(x)$ неодновершинна, хотя $G(x)$ и одновершинна. Таким образом, мы доказали, что если $F(x)$ — сильно одновершинная функция распределения с непрерывной $F''(x)$ и множеством $E = (-\infty, \infty)$, то логарифм ее плотности есть функция, вогнутая на $(-\infty, \infty)$.

Чтобы перейти к общему случаю, понадобятся два вспомогательных утверждения.

Лемма 2. *Множество сильно одновершинных распределений замкнуто относительно операции композиции и предельного перехода* *.

Лемма 3. *Если* $\{F_n(x)\}$ *— последовательность одновершинных функций распределения и* $F_n(x) \Rightarrow F(x)$, *то существует такая подпоследовательность* $\{F_{n_k}(x)\}$, *что* $F'_{n_k}(x) \to F'(x)$ *почти всюду.*

Лемма 2 очевидна и в доказательстве не нуждается. Приступим к доказательству леммы 3. Предположим противное. Пусть такой последовательности не существует. Если $a_1, a_2, \ldots$ — вершины функций $F_1(x)$, $F_2(x), \ldots$ и 0 — вершина $F(x)$, то можно считать, что $\lim a_n = 0$. На любом из промежутков $(-\infty, -b]$, $[b, \infty)$, $b > 0$, функции $F'_n(x)$ ** равномерно ограничены: начиная с некоторого места для всех n $b - |a_n| > \varepsilon$ и $F'_n(\pm b) < \frac{1}{\varepsilon}$ (в противном случае $\int F'_n(x)\,dx > 1$). Поэтому, пользуясь теоремой Хелли [2], мы можем выделить подпоследовательность $F'_{n_k}(x)$, сходящуюся в каждой точке, кроме, может быть, точки $x = 0$, к неубывающей функции при $x < 0$ и к невозрастающей функции при $x > 0$. Так как $\lim F'_{n_k}(x)$ и $F'(x)$ непрерывны почти всюду, существует такой промежуток $[x_1, x_2]$, что для почти всех точек $x \in [x_1, x_2]$

$$\lim F'_{n_k}(x) - F'(x) > \gamma > 0\ (< -\gamma).$$

Положим, для определенности, $x_2 < 0$. Тогда

---

* Точнее: если $F_n(x)$ — последовательность сильно одновершинных функций распределения, слабо сходящаяся к функции распределения $F(x)$, то $F(x)$ сильно одновершинна.

** Здесь и далее $F'(x)$ означает производную правую или левую, безразлично какую.

$$\lim_{n_k\to\infty}(F_{n_k}(x_1)-F(x_1))=\lim_{n_k\to\infty}\int_{-\infty}^{x_1}(F'_{n_k}(x)-F'(x))\,dx=0,$$

$$\lim_{n_k\to\infty}(F_{n_k}(x_2)-F(x_2))=\lim_{n_k\to\infty}(F_{n_k}(x_1)-F(x_1))+$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\left[\lim_{n_k\to\infty}F'_{u_k}(x)-F'(x)\right]dx\neq 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Заметим еще, что если $F_n(x)\Rightarrow F(x)$ (в условиях леммы 3) и все $\psi_n(x)=\ln F'_n(x)$ вогнутые на $(-\infty,\infty)$ функции, то все $\psi_n(x)$ равномерно ограничены сверху, поэтому все $F'_n(x)$ равномерно ограничены, последовательность $\{F_n(x)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна и, значит, в силу теоремы Арцела $F(x)$ непрерывна везде.

Пусть теперь $F(x)$ — произвольная сильно одновершинная функция распределения. Функции $F(x)*\Phi(nx)=F(x)$ — сильно одновершинна с вогнутым на $(-\infty,\infty)$ логарифмом плотности. Ясно, что $F_n(x)\Rightarrow F_n(x)$ и потому (см. предыдущее замечание) $F(x)$ непрерывна и почти везде $F'_n(x)\to F'(x)$. Положим

$$\psi_d(x)=\ln D_dF(x),$$
$$\psi_s(x)=\ln D_sF(x).$$

Почти всюду на E

$$\psi_n(x)\to\psi_d(x),$$
$$\psi_n(x)\to\psi_s(x).$$

Докажем, что любая точка $x\in E$ есть точка непрерывности $\psi_d(x)$ (так как $F(x)$ непрерывна, $\psi_d(x)$ и $\psi_s(x)$ существуют и при $x=0$).

Рассмотрим последовательности $\{x^{(1)}_{+n}\}$, $\{x^{(1)}_{-n}\}$, $\{x^{(2)}_{+n}\}$, $\{x^{(2)}_{-n}\}$, такие, что $x^{(i)}_{+n}>x$, $x^{(i)}_{-n}<x$, $x^{(i)}_{\pm n}\to x$,

$$\frac{x^{(1)}_{+n}+x^{(1)}_{-n}}{2}<x,\quad \frac{x^{(2)}_{+n}+x^{(2)}_{-n}}{2}>x$$

и все $x^{(i)}_{\pm n}\,\dfrac{x^{(i)}_{\pm n}+x^{(i)}_{\mp n}}{2}$ — точки сходимости $\psi_n(x)$ к $\psi_d(x)$. Тогда

$$\psi_d\left(\frac{x^{(1)}_{+n}+x^{(1)}_{-n}}{2}\right)\geqslant\frac{\psi_d(x^{(1)}_{+n})+\psi_d(x^{(1)}_{-n})}{2},$$

$$\psi_d\left(\frac{x^{(2)}_{+n}+x^{(2)}_{-n}}{2}\right)\geqslant\frac{\psi_d(x^{(2)}_{+n})+\psi_d(x^{(2)}_{-n})}{2}.$$

Отсюда $\psi_d(x-0)=\psi_d(x+0)$. Точно так же $\psi_s(x-0)=\psi_s(x+0)$. Так как $\psi_d(x)$ и $\psi_s(x)$ не убывают при $x<0$ и не возрастают при $x>0$, то $\psi_d(x)$ и $\psi_s(x)$ непрерывны при всех таких x и $\psi_d(x)=\psi_s(x)=\psi(x)$. Так как, кроме того, производная не может иметь разрывов первого рода, $\psi(x)$ непрерывна на E и всюду на E

$$\psi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{\psi(x_1)+\psi(x_2)}{2}.$$

Достаточность. Пусть $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, множество $E=(-\infty,\infty)$, а $G(x)$—произвольная одновершинная функция. Мы будем считать $G(x)$ достаточно гладкой, в противном случае можно рассмотреть $G(x)*\Phi(nx)$. Итак, пусть $F(x)*G(x)=H(x)$. Нам достаточно доказать, что если $H''(x_0)=0$, то для $x>x_0$

$$H''(x)\leqslant 0.$$

Пусть

$$H''(x_0)=0$$

и $\delta>0$. Тогда

$$H''(x_0+\delta)=\int_0^\infty G''(t)\,F'(x_0-t)\,\frac{F'(x_0+\delta-t)}{F'(x_0-t)}\,dt+\int_0^\infty G''(-t)\,F'(x_0+t)\,\frac{F'(x_0+\delta-t)}{F'(x_0-t)}\,dt=$$

$$=\frac{F'(x_0+\delta-\xi_1)}{F'(x_0-\xi_1)}\int_0^\infty G''(t)\,F'(x_0-t)\,dt+\frac{F'(x_0+\delta+\xi_2)}{F'(x_0+\xi_2)}\int_0^\infty G''(-t)\,F'(x_0+t)\,dt.$$

Нам достаточно доказать, что при всех $\xi_1,\ \xi_2\geqslant 0$ и $\delta>0$

$$\frac{F'(x_0+\delta-\xi_1)}{F'(x_0-\xi_1)}\geqslant\frac{F'(x_0+\delta+\xi_2)}{F'(x_0+\xi_2)}.$$

Положим

$$x_0-\xi_1=v,$$
$$x_0+\xi_2=u.$$

Если бы для каких-то $\xi_1,\ \xi_2\geqslant 0$ и $\delta>0$ было бы

$$\frac{F'(x_0+\delta-\xi_1)}{F'(x_0-\xi_1)}<\frac{F'(x_0+\delta+\xi_2)}{F'(x_0+\xi_2)},$$

то

$$\psi(v+\delta)-\psi(v)<\psi(u+\delta)-\psi(u),$$

что противоречит соотношениям вогнутости

$$\psi(v+\delta)\geqslant\frac{u-v}{u+\delta-v}\,\psi(v)+\frac{\delta}{u+\delta-v}\,\psi(u+\delta),$$

$$\psi(u)\geqslant\frac{\delta}{u+\delta-v}\,\psi(v)+\frac{u-v}{u+\delta-v}\,\psi(u+\delta).$$

Если, наконец, $E\neq(-\infty,\ \infty)$, то, как легко видеть, всегда существует последовательность $F_n(x)\Rightarrow F(x)$ и все $F_n(x)$ сильно одновершинные функции распределения с $E=(-\infty,\ \infty)$.

Приношу глубокую благодарность Ю. В. Линнику за оказанную им помощь при подготовке к печати настоящей заметки.

Поступила в редакцию
20.1.56

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей. М.—Л., 1946 г.
[2] И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, М.—Л., 1950 г.
[3] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для суммы независимых случайных величин. М.—Л., 1949 г.

ON THE COMPOSITION OF UNIMODAL DISTRIBUTIONS

I. A. IBRAGIMOV (LENINGRAD)

(*Summary*)

A distribution function is called strong unimodal if its composition with any unimodal distribution function is unimodal.

The following theorem is proved:

For a proper unimodal distribution $F(x)$ to be strong unimodal it is necessary and sufficient that the function $F(x)$ be continuous, and the function $\log F'(x)$ be concave at a set of points where neither the right nor the left derivative of the function $F(x)$ is equal to zero.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французком языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора. Редакция просит в оформлении цитируемой литературы придерживаться порядка, принятого в журнале.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, или Киев, площадь Калинина, 6, Институт математики АН УССР.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and Its Applications accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technoligy.

Articles of the letter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentiallu new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or Frensh, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces. References to books and articles cited should conform to the standard adopted by the publishers.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to adress their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics; or to Kiev, Kalinin Square 6, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR.

Т-11057 Подписано к печати 22/XI-1956 г. Тираж 1750 экз. Заказ 884
Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Бум. л. 3,5. Печ. л. 9,59+1 вкл. Уч.-изд. л. 9,3

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

ЛЕФОРТОВСКИЙ РАЙ
С.7.6 КОР.9 ЯЧ 43
ЗОЛОТАРЕВУ Т.Л.

Цена 11 р. 25 к.

2-26

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

КОНТОРА «АКАДЕМКНИГА»

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ КНИГИ ПО МАТЕМАТИКЕ:

Труды Математического института имени В. А. Стеклова. *ТОМ XVII.* Л. В. Келдыш. Структура В-множеств. 1945. 74 стр. Ц. 5. р. 60 к.

Труды Математического института имени В. А. Стеклова. *ТОМ XXIV.* Н. А. Шанин. О произведении топологических пространств. 1948. 111 стр. Ц. 4 р. 80 к.

Труды Математического института имени В. А. Стеклова. *ТОМ XXXIX.* А. В. Погорелов. Однозначная определенность выпуклых поверхностей в малом. 1949. 99 стр. Ц. 4 руб.

Труды Математического института имени В. А. Стеклова. *ТОМ XXXIV.* Л. И. Волковыский. Исследования по проблеме типа односвязной римановой поверхности. 1950. 171 стр. Ц. 6 р. 80 к.

Труды Математического института имени В. А. Стеклова. *ТОМ XXXVIII.* Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его 60-летию. 1951. 387 стр. Ц. 16 р.

Труды Математического института имени В. А. Стеклова. *ТОМ XLIII.* Н. А. Шанин. О некоторых логических проблемах арифметики. 1955. 111 стр. Ц. 5 р. 20 к.

Труды Математического института имени В. А. Стеклова. *ТОМ XLVI.* М. М. Постников. Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений. I. Алгебраическая теория систем. II. Натуральная система и гомотопический тип. 1955. 158 стр. Ц. 7 р. 35 к.

Чебышев П. Л. **Избранные труды.** Отв. ред. акад. И. М. Виноградов. Ред.-сост. — чл.-корр. АН СССР А. О. Гельфонд. (Серия «Классики науки»). 1955. 926 стр., 1 вкл. Ц. 37 р. 70 к. в пер.
Разделы книги: Теория чисел. Теория вероятностей. Анализ. Теория механизмов. Приложения.

Чебышев П. Л. **Полное собрание сочинений.** Том *IV.* Теория механизмов. 1948. 254 стр. Ц. 20 р. в пер.

Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. Том V. Прочие сочинения. Биографические материалы. 1951. 474 стр. Ц. 30 р. в пер.

КНИГИ ПРОДАЮТСЯ В МАГАЗИНАХ «АКАДЕМКНИГА»

ИНОГОРОДНИМ ЗАКАЗЧИКАМ КНИГИ ВЫСЫЛАЮТСЯ ПО ПОЧТЕ НАЛОЖЕННЫМ ПЛАТЕЖОМ.

ЗАКАЗЫ НАПРАВЛЯТЬ ПО АДРЕСУ:
МОСКВА, УЛ. КУЙБЫШЕВА, Д. 8, КОНТОРА «АКАДЕМКНИГА»